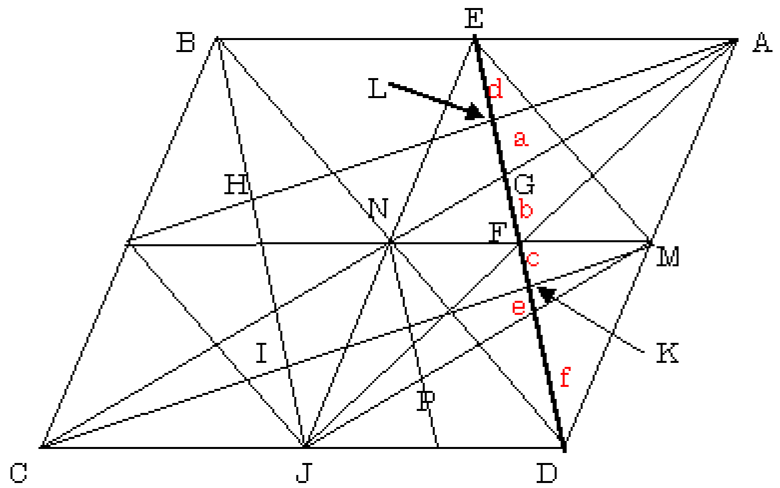
平行四辺形ダイヤグラム

（Ｉ）平行四辺形の頂点と向かいの辺の中点をむすぶ線分は、4頂点と4中点のいずれかを両端とするすべての線分によって、6:4:5:3:2:10の比に分割される。



平行四辺形の中線定理により、線分 DE において、２(d+a)＝b+c+e+f　・・・①

a+d＝２b＝ f　・・・②

三角形ＡＬＤにおいて、AL と MK は平行なので、a+b+c＝e+f　・・・③

三角形ＡＢＨにおいて、BH と EL は平行なので、２ d＝BH＝e+f＝a+b+c

４ d＝a+b+c+e+f　・・・④

①と④から、３a＝２d

三角形ＡＥＧと三角形ＭＮＰは合同なので、d:a＝c:e

よって、 f＝１０とおくと、

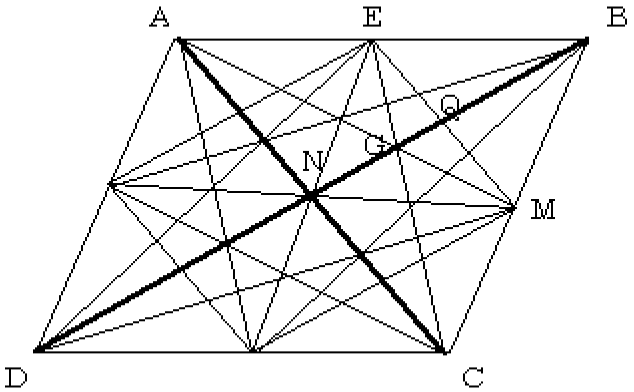
a+d＝１０、 d＝６、a＝４

b＝1/２(a+d)＝５

c+e＝５、 c＝３、e＝２

となり、線分ＥＤは、６ ：４ ：５ ：３ ：２ ：１０に分割されていることがわかった。

（Ⅱ）平行四辺形の対角線は、4頂点と4中点のいずれかを両端とするすべての線分によって、3:1:2:2:1:3の比に分割される。



平行四辺形の中線定理により、ＢＧ＝２ＧＮ

Ｇは三角形ＥＭＮの重心なので、ＮＧ＝２ＧＱ

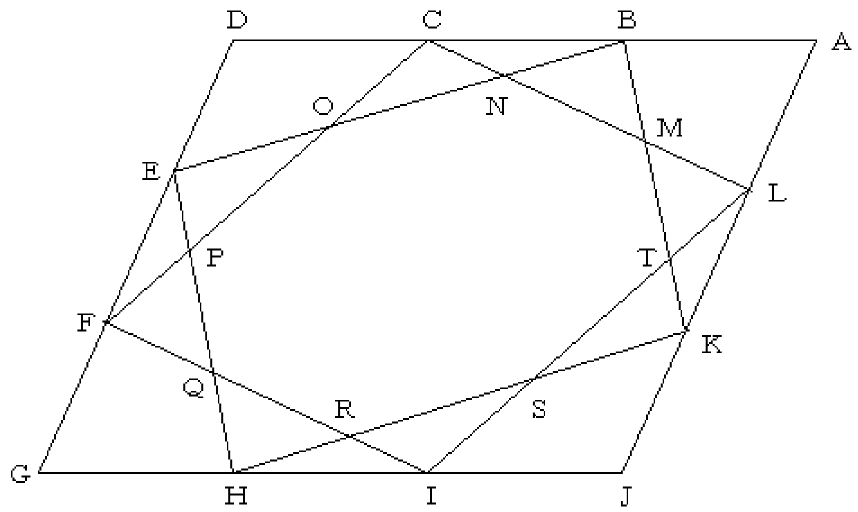
したがって、ＢＧを４とおくと、ＢＱ：ＱＧ：ＧＮ＝３：１：２

よって平行四辺形の対角線は、頂点と中点のどれかをむすぶ線分によって、

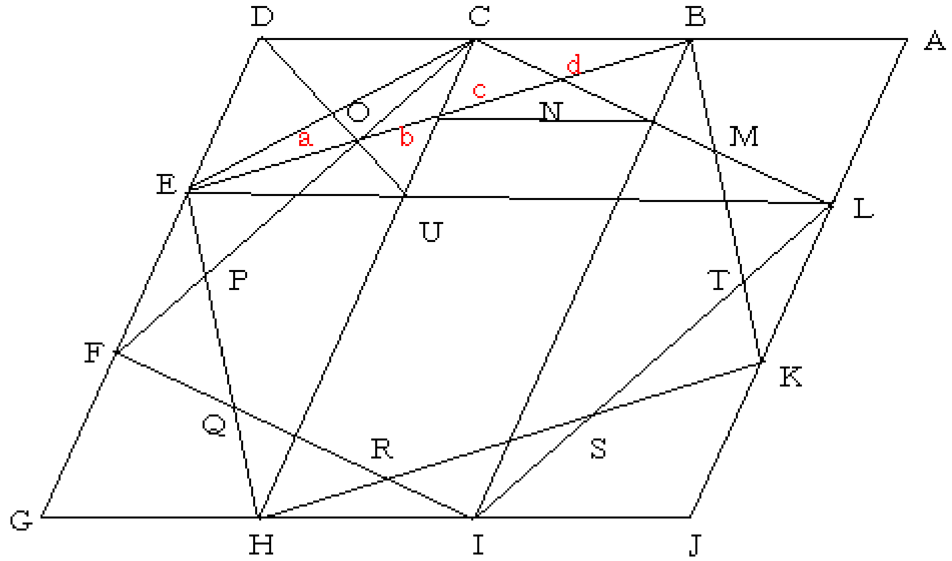
３：１：２：２：１：３に分割されていることになる。

平行四辺形の3等分点ダイヤグラム

平行四辺形の頂点と２等分点をつかったダイヤグラムでは、平行四辺形の重なりにおいて、４：５：３の比があらわれた。
では、３等分点を使ったダイヤグラムではどうだろうか？

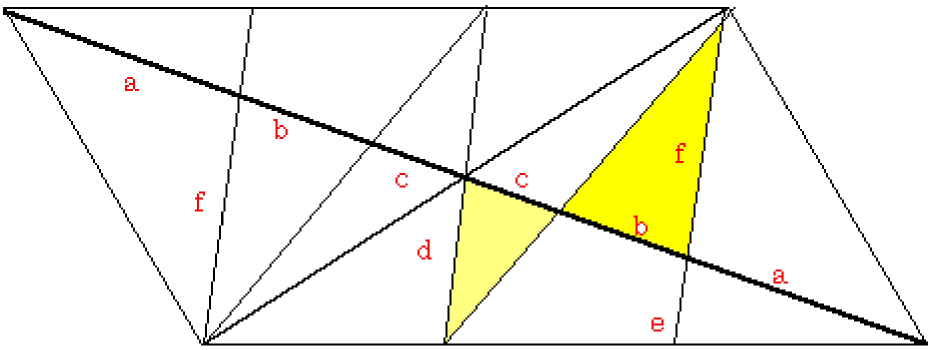


求めるのは、ＥＯ：ＯＮ：ＮＢである。



三角形ＣＥＵにおいてＯは重心であるから、a:b＝２：１
また、対角線ＢＥはＣＵによって２等分されているので、a+b＝c+d
また、平行四辺形の対角線は相互に２等分するので、ｃ＝ｄ
そこで、a+b＝６とおくと、a＝４、ｂ＝２、ｃ＝３、ｄ＝３
よって、ＥＯ：ＯＮ：ＮＢ＝４：５：３である。

平行四辺形の対角線は、ほかの2頂点から対辺の3等分点にひいた4本の線分によって5:3:4:3:5に分けられる。



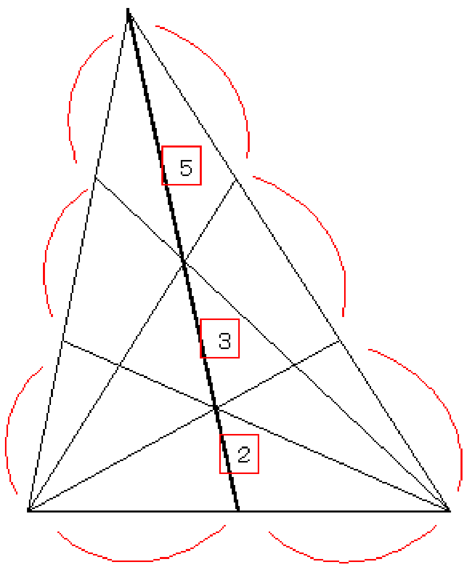
上の図において、ｅ：ｄ：ｆ＝１：２：３

着色部分は相似図形なので、ｂ：ｃ＝ｆ：ｄ＝３：２

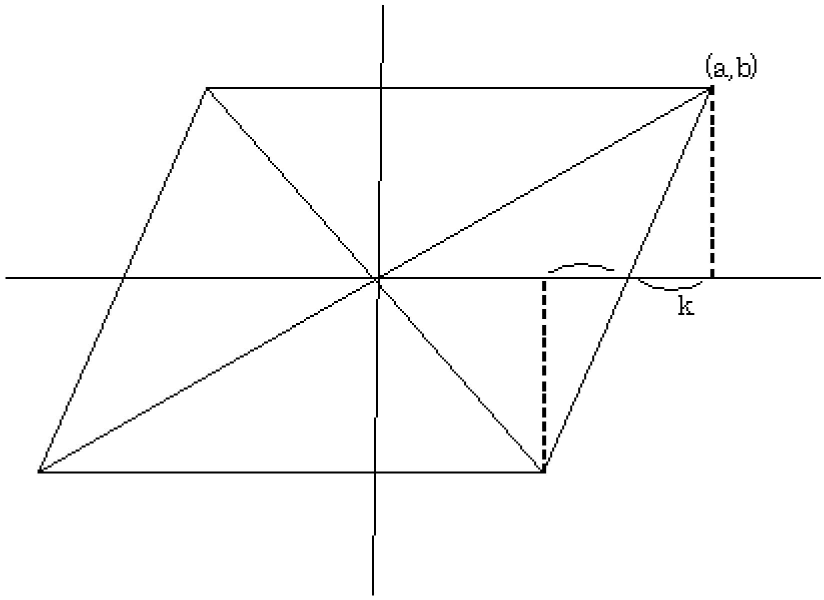
また、ａ＝ｂ＋ｃなので、ａ：ｂ：ｃ＝５：３：２

同じことを三角形でいいかえると、

三角形の中線は、他の頂点と対辺の3等分点とを結ぶ線分によって5:3:2に分割される。



平行四辺形の2本の対角線の自乗和は４辺の自乗和と一致する



このように座標表示すると、

２（長辺^2）＝８(a－k)^2

２（短辺^2）＝８(b^2+k^2)

これらを合せると、

２（長辺^2）＋２（短辺^2）＝８(a^2－２ak＋２ｋ^2＋b^2)

他方、

長対角線^2＝４（a^2＋b^2)

短対角線^2＝４[（a－２ｋ）^2＋ｂ^2]

合せると、

長対角線^2＋短対角線^2＝８(a^2－２ak＋２ｋ^2＋b^2)

したがって、

２（長辺^2）＋２（短辺^2）＝長対角線^2＋短対角線^2