

## 正12面体の3等分輪切り

中川宏

「プラトンとアルキメデスの立体」でダウド・サットンはふしぎな事実を指摘しています。正12面体をテーブルに置いたときに、赤道付近にならぶ10の頂点をむすぶ2つの水平面によって、体積が3等分されるというのです。

たしかめてみましょう。

北半球の五角錐台の体積 $V_D$ が正12面体の体積の $1/3$ になるかどうかということです。

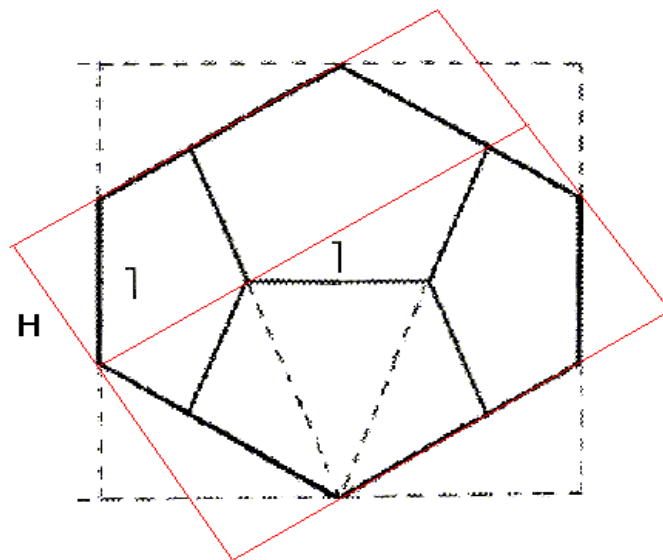
角錐台の体積は $1/3 \times$ 高さ $\times$ (底面積 $+$  $\sqrt{}$ (底面積 $\times$ 天面積) $+$ 天面積)ですが、

正12面体の底面積 $S_b = \tau^2 \times$ 天面積 $S_a$ 。

なので、底面積 $+$  $\sqrt{}$ (底面積 $\times$ 天面積) $+$ 天面積)の部分は

$$S_a + \tau S_a + \tau^2 S_a = (\tau^2 + \tau + 1)S_a = 2\tau^2 S_a$$

$$\text{一辺1の正五角形の面積 } S_a = 1/4 \sqrt{(4\tau^2 - 1) \times (1 + 2/\tau)}$$



$$H = \tau / \sqrt{1 + \tau^2}$$

角錐台の高さ $H$ は上の図から相似比により右のようになります。

したがって五角錐台の体積

$$V_D = 1/3 \times \tau / \sqrt{(\tau^2 + 1)} \times 2\tau^2 \times 1/4 \sqrt{(4\tau^2 - 1) \times (1 + 2/\tau)}$$

$$= 1/3 \times \tau / \sqrt{(\tau^2 + 1)} \times \tau \times 1/2 \sqrt{(4\tau^2 - 1) \times (\tau^2 + 1)}$$

$$= \tau^2 / 6 \times \sqrt{(4\tau^2 - 1)} \times \sqrt{(\tau^2 + 1)}$$

ところで、正12面体の体積 $V_{12} = \sqrt{5}/2 \times \tau^4$ と比較するために、上の式の $\sqrt{}$ のなかから $\tau$ をひっぱりだすと、

$1/\tau = \tau - 1$ を利用して、

$$V_D = 1/3 \times \tau^4 \times 1/2 \times \sqrt{(\tau + 2)} \sqrt{(3 - \tau)}$$

ところが不思議なことに

$$(\tau+2)(3-\tau)=-\tau^2+\tau+6=-(1+\tau)+\tau+6=5$$

となって $\sqrt{\quad}$ のなかから $\tau$ が消えてしまうのです。よって

$$V_D=1/3 \times \tau^4 \times 1/2 \times \sqrt{5}$$

となり、五角錐台の体積 $V_D$ は正12面体の体積 $V_{12}$ の $1/3$ であることが確かめられました。

この計算、途中はいったいどうなるのやらと不安が募りますが、突然最後に視界が開ける感じでした。立方体から正12面体を切り出すときの状況ととてもよく似ています。