正１２面体と正２０面体ではどっちが丸いか？
木製正多面体模型の活用法（その１）

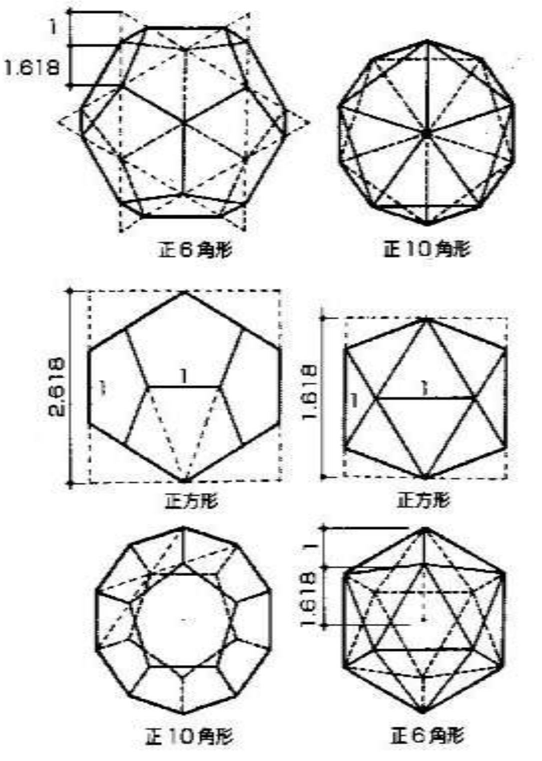
中川宏

「正多面体を解く」（一松　信著、東海大学出版会）１９ｐでは、
Ｖ/ＳＲ　（体積を、表面積と重心から頂点までの長さで割ったもの）を比較して、
正１２面体は０．２５４８８
正２０面体は０．３１７８６
であることを解説して、「面数が増すにつれて球のもつ最大値１/３に近づく」と指摘されています。

他方、「不思議おもしろ幾何学事典」（Ｄ・ウェルズ著、朝倉書店）６６ｐには、
「驚くべきことには、一つの同じ球に正１２面体と正２０面体を内接させると、正１２面体のほうが大きな体積を占める。それから考えると、正２０面体は正１２面体より側面の数は多いが、じつは正１２面体のほうがより球面に近いということになる。」とあります。

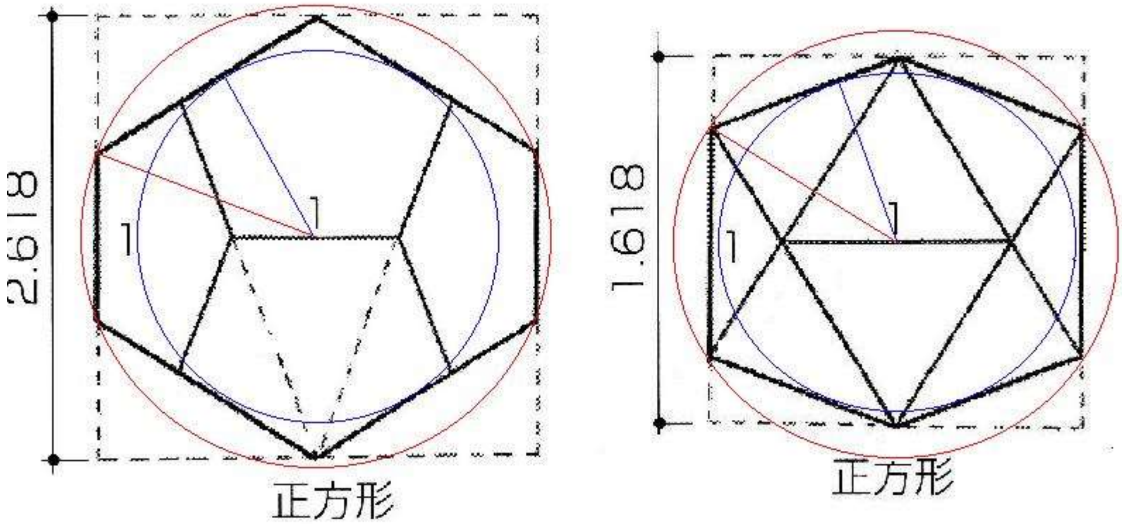
先月全国の附属中学校の数学の先生に問い合わせたところ、７４校中８校から、３学期の正多面体の授業にぜひ木製正多面体模型を使いたいというご要望が寄せられたので、目下フル回転中なのですが、その合間の休憩時間にこの問題を考えてみました。

［１］　見た目で比較



ひとはその判断をかなりの程度視覚的な情報に依存しています。人間の目は２つついているので視差を利用して遠近感などある程度立体的につかむこともできるのですが、その効果は限定的でおおむね視覚情報は投影された平面図といっていいでしょう。
正１２面体と正２０面体を見た目で比較するといっても、それぞれいろんな方向から見ることができますから、一概には言えません。そこで、特定の視点を定めて比較してみることにしましょう。宮崎興二先生の著作から右のような図解を借りてきました。上から点心図、辺心図、面心図といいます。左が正１２面体、右が正２０面体です。
一目瞭然なのは、点心図は正２０面体が、面

心図では正１２面体が、より丸いということです。ところが中段の辺心図はどうでしょうか。一目で見極めがつきますか？きわどいですね。そこで、それぞれの外接円と内接円と比較してみました。



		面積				面積
正12面体	(一辺)1	4.736		正20面体	(一辺)1	2.118
外接円	(半径)1.4012	6.167		外接円	(半径)0.951	2.841
外接円との面積比		76.8%		外接円との面積比		74.6%
内接円	(半径)1.1135	3.894		内接円	(半径)0.7557	1.794
内接円との面積比		121.6%		内接円との面積比		118.1%

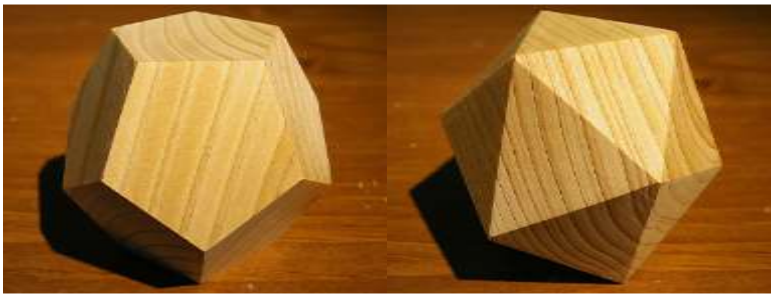
このように外接円と比較したばあいには正１２面体のほうが円の面積により近いが、内接円と比較すると正２０面体のほうが円の面積により近いという結果になりました。

以上から、見た目で比較する限りでは、１ 勝１敗１分け。正１２面体と正２０面体はどちらがより丸いか甲乙つけがたい、といえるでしょう。

正１２面体と正２０面体ではどっちが丸いか？
木製正多面体模型の活用法（その２）

［２］　触って比較する

見た目ではどちらが丸いともいえないなら、触ってみたらどうでしょうか。じつはこの触ってみるという観察にとっては、私が製作している木製正多面体模型はうってつけだと



思っています。掌で握ったり回したりするのにちょうどいい大きさなのです。

そこでまわりのひとに触ってみてどちらがより丸く感じますか？と、アンケート調査をしてみました。すると、多くの人は迷うという傾向がでました。つまり触覚でも甲乙つけがたいと思われるのです。その理由を考えてみましょう。

掌で木製の模型を触るときには、てのひらには、立体の面を感じるところと頂点を感じるところができます。もし面を感じる部分で球をイメージすればそれは正多面体にとっての内接球、頂点を感じる部分で球を思い描けば外接球を意味します。ひとはこの２種類の球と多面体を比較することが出来るといえるでしょう。

正１２面体と正２０面体の、それぞれの外接球、内接球との関係はつぎのようになっています。

正１２面体の外接球の半径：${}_{0}R_{12}$　正１２面体の一辺：a_{12}

正２０面体の外接球の半径：${}_{0}R_{20}$　正２０面体の一辺：a_{20}

とすると、（その１）での計算結果から、

${}_{0}R_{12} = 1.4012a_{12}$

${}_{0}R_{20} = 0.9511a_{20}$

${}_{0}R_{12} = {}_{0}R_{20}$　と球の大きさを同じにしたときには、

$a_{12} = 0.6787a_{20}$　という関係があります。

これらをもとに、a_{20}の関係式として整理すると、

外接球の体積${}_{0}V = 4/3\pi({}_{0}R_{20})^3 = 3.602(a_{20})^3$にたいして、

正１２面体の体積$V_{12} = (15+7\sqrt{5})/4 \cdot a_{12}{}^3 = 2.3957(a_{20})^3$・・６６．５％

正２０面体の体積$V_{20} = 5(3+\sqrt{5})/12 \cdot a_{20}{}^3 = 2.1817(a_{20})^3$・・６０．６％

外接球の面積${}_{0}S = 4\pi({}_{0}R_{20})^2 = 11.363(a_{20})^2$にたいして、

正１２面体の面積$S_{12} = 3\sqrt{(25+10\sqrt{5})}\ a_{12}{}^2 = 9.5101(a_{20})^2$・・８３．７％

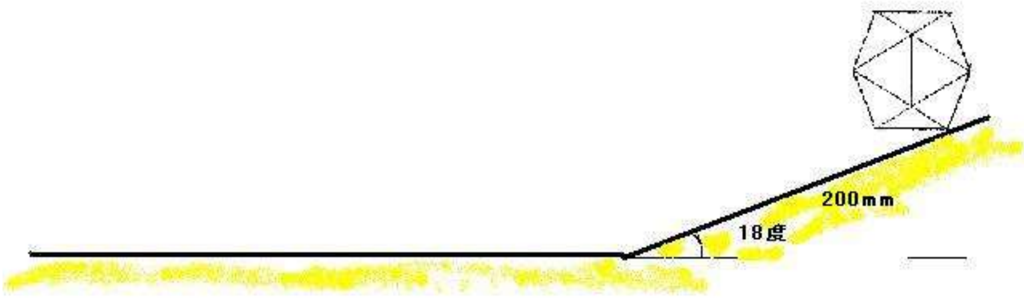
正２０面体の面積$S_{20}=5\sqrt{3}\cdot a_{20}{}^2=８．６６０３(a_{20})^2$・・７６．２％
となります。
したがって、外接球にたいしては、正２０面体よりも正１２面体のほうが近いといえるでしょう。
他方、内接球との関係は、（その１）での計算結果から、
$_IR_{12}=１．１１３５a_{12}$
$_IR_{20}=０．７５５７a_{20}$　であるが、
$_IR_{12}={}_IR_{20}$　と球の大きさを同じにしたときには、
$a_{12}=０．６７８７a_{20}$ という外接球の場合と同じ関係があります。以下同様に、
a_{20}の関係式として整理すると、
内接球の体積$_IV=4/3\pi({}_IR_{20})^3=１．８０８(a_{20})^3$にたいして、
正１２面体の体積$V_{12}=２．３９５７(a_{20})^3$・・１３２．５％
正２０面体の体積$V_{20}=２．１８１７(a_{20})^3$・・１２０．７％
内接球の面積$_IS=4\pi({}_IR_{20})^2=７．１７５(a_{20})^2$にたいして、
正１２面体の面積$S_{12}=９．５１０１(a_{20})^2$・・１３２．５％
正２０面体の面積$S_{20}=８．６６０３(a_{20})^2$・・１２０．７％
となります。
したがって、内接球にたいしては、正１２面体よりも正２０面体のほうが近いといえるでしょう。ようするに外接球と比較するのか、内接球と比較するのかによって、正１２面体と正２０面体のどちらがより球に近いかの判断はわかれるということがいえるのです。

ちなみに、局所的に尖った部分の鋭さに神経を集中させれば、正２０面体のほうが尖って感じるでしょう。それは正１２面体の三角錐の勾配と、正２０面体の五角錐の勾配を比較することになりますから、
正１２面体の稜面角＝１２１．７１７５°
正２０面体の稜面角＝１１０．９０５２°
の差として感じるといえるでしょう。

正１２面体と正２０面体ではどっちが丸いか？
木製正多面体模型の活用法（その３）

目で見ても、触ってみてもどちらがより球に近いか甲乙つけがたかった正１２面体と正２０面体ですが、木製模型をつかうと、次のような比較方法が可能になります。

［３]転がしてみる

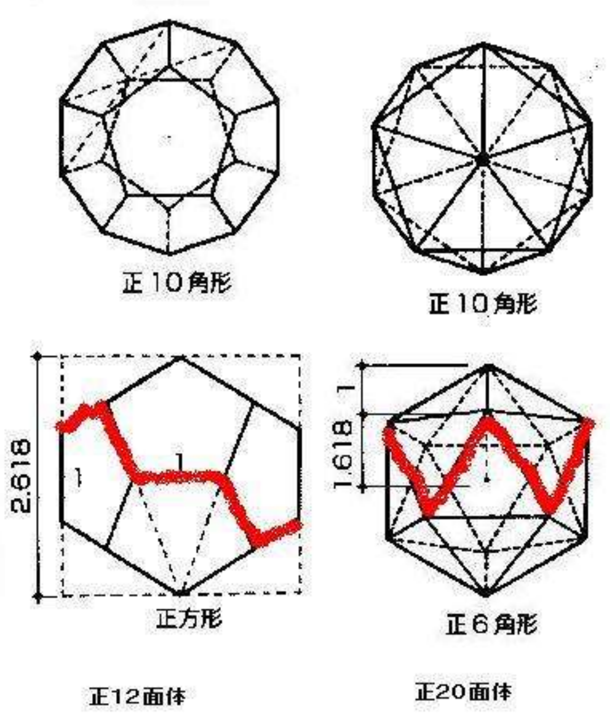


附属中学校は１クラス４０人くらいだそうなので、一人１回ずつ転がしてもらうことを想像して、実験してみました。

転がし実験(mm)		
回数	正20面体(45g)	正12面体(31g)
1	55	198
2	100	65
3	107	340
4	25	256
5	93	131
6	160	185
7	63	152
8	43	362
9	48	426
10	82	290
11	120	75
12	29	272
13	119	282
14	70	293
15	116	200
16	91	420
17	57	284
18	105	380
19	28	141
20	95	443
平均	80.3	259.8

ごらんのように圧倒的に正１２面体のほうが転がりやすいという結果になりました。

重さがそろっていないのですが、おそらく運動エネルギーは質量に比例するので、正１２面体のほうが軽いというハンデがありながらもこの結果ですから、転がりやすさという点では正１２面体に軍配を挙げていいのでしょう。
しかしこの事実を説明するのは簡単なことではありません。
まず、それぞれの外接球の半径と内接球の半径を比較してみました。しかし正１２面体も正２０面体もともに、１．２５８でまったく同じでした。ここでかなり悩んだのですが、ようやく最高点と最低点を繰り返すような転がり方は距離の出ない転がり方の典型だろうと気がつきました。
もっとも距離の出そうな転がり方は、投影図の外形が正１０面体となるような転がり方でしょう。正１２面体の場合は面心図、正２０面体の場合は点心図です。



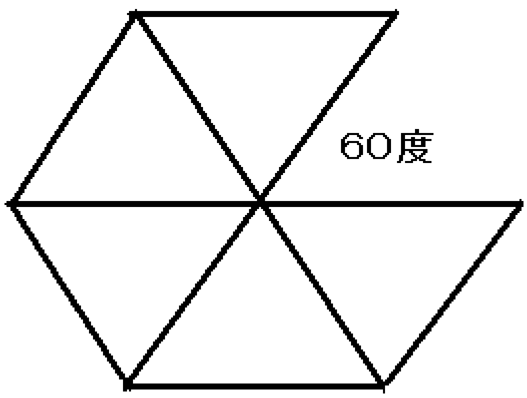
このような最適な転がり方をする場合には、面は接地せず、稜（辺）だけが接地します。
しかしその様子にはかなりの違いがあります。赤いところで示しました。
正１２面体の軌跡はゆるいジグザグですが、正２０面体の軌跡は急なジグザグです。そのために正２０面体のほうが回転中に左右にバランスを崩しやすいでしょう。これが正２０面体の転がり距離が短い要因ではないでしょうか。
ただしもっとジグザグが細かくなっていくと今度は逆に円筒に近づいて安定すると想像されます。したがってこの点も一概には言えないわけですが、親指と人差し指で正１２面体の対面をはさんで転がす場合と、正２０面体の頂点をはさんで転がす場合の指に伝わる左右のブレ度合いは実感していただけるだろうと思います。

正１２面体と正２０面体ではどっちが丸いか？
木製正多面体模型の活用法（その４）

中川宏

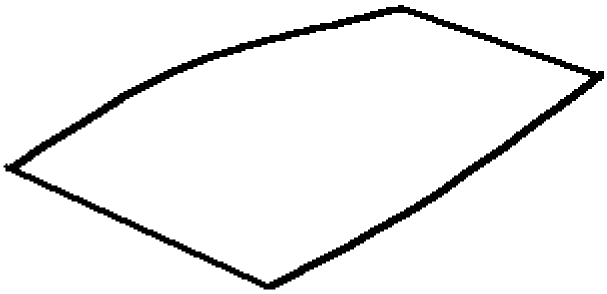
頂点まわりの鋭さを表す指標として「不足角」という考え方があることを知りました。
この場合は紙模型を使うとわかりやすいのですが、ある頂点に集まる一本の稜を切り開いて頂点に集まる面を平らにしたときに切り開いた稜が成す角度です。これが小さいほうが緩やかな頂点ということになります。
正１２面体の場合は３６０－１０８×３＝３６度
正２０面体の場合は３６０－６０×５＝６０度
ですから、正１２面体の頂点のほうが正２０面体の頂点より丸いということになります。

ところで、この「不足角」について、どんな多面体でもすべての「不足角」の合計は７２０度だという驚くべき定理を発見したのがかの有名なデカルトなのだそうです。



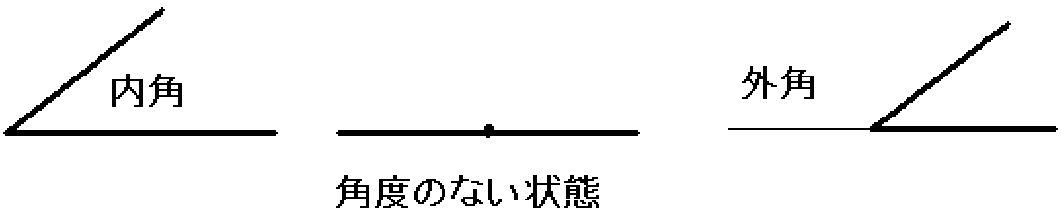
正四面体・・・１８０×４
正８面体・・・１２０×６
立方体・・・・９０×８
正１２面体・・３６×２０
正２０面体・・６０×１２
というように正多面体ではかんたんに確かめることが出来ます。
このデカルトの定理を利用すれば、不足角の総和は決まっているので、一様な頂点周りを持つ立体どうしなら、頂点の数だけで・頂点数の多いほうが丸いと決めることが出来ることになります。

ここで、不足角の合計の７２０度という数字はどのような意味があるのか気になりました。
立体をそのまま取り扱うのは複雑なので究極まで単純化して、２面体というものを考えてみることにしました。２面体というのは封筒のようなものですが、もちろん私が考えたものではなく、去年秋山先生の講演会に参加したおり、秋山の定理として知られる正４面体の曲線を含むどのような展開図も平面を充填するという事実は、封筒のような２面体でも成り立つと教わったことが頭の隅に残っていたものです。



図は４角形ですが、何角形でもいいわけです。n 角形のとき、内角の総和は、いくつの三角形に分割できるかということから、１８０（n－２）度、裏表面あわせると
３６０（n－２）度なので、不足角は
n×３６０－｛３６０（n－２）｝＝７２０度
というわけです。

さて、不足角７２０度を２面分と考えると、１面当たり３６０度ともとれます。そうすると多角形の外角の総和は３６０度という定理と重なってきます。



ちょっと考えると、ある角度（内角）の不足角は３６０－内角と思いがちですが、２つの線分が角度をなさない状態というのを考えると（真ん中の図）それは１８０度ですから、ある平面角の不足角は右の図のように、外角を意味することになります。
ここでまた、平面図形を究極まで押しつぶして２辺形（２角形）を考えます。

そうすると不足角（外角）の和は
１８０×２＝３６０度
となります。

線分をつなげて閉じた平面図形にするためには、線分どうしが角度をなすように配置していかなければなりません。結局その角度の総和がぐるっと一周分３６０度になったときにだけ閉じた図形は完成します。したがって多角形の外角（不足角）の和３６０度というのは平面そのものを意味することになります。
おなじように立体図形も閉じた立体にするためには、構成する面どうしが総計で全空間分の角度をなすように配置しなければなりません。それが７２０度というわけです。
平面は xy 直交座標によって４つの直角に分けられます。
これに対して空間は xyz 直交座標によって８つの立体直角部分に分けられます。
じっさい、８つの立体直角によって６つの平面が閉じて直方体になることがわかります。
一つの立体直角の不足角は１平面直角です。なので、８つの立体直角分の不足角は８平面直角＝７２０度と理解できます。
また、もっとも単純な立体図形である２面体の不足角が、多角形の外角の和の２面分とみなせることから、立体図形の不足角の総和は平面図形の外角の和２面分＝７２０度に還元できると理解してもいいのではないでしょうか。