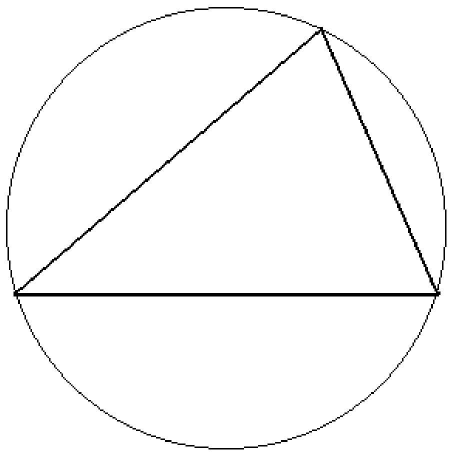
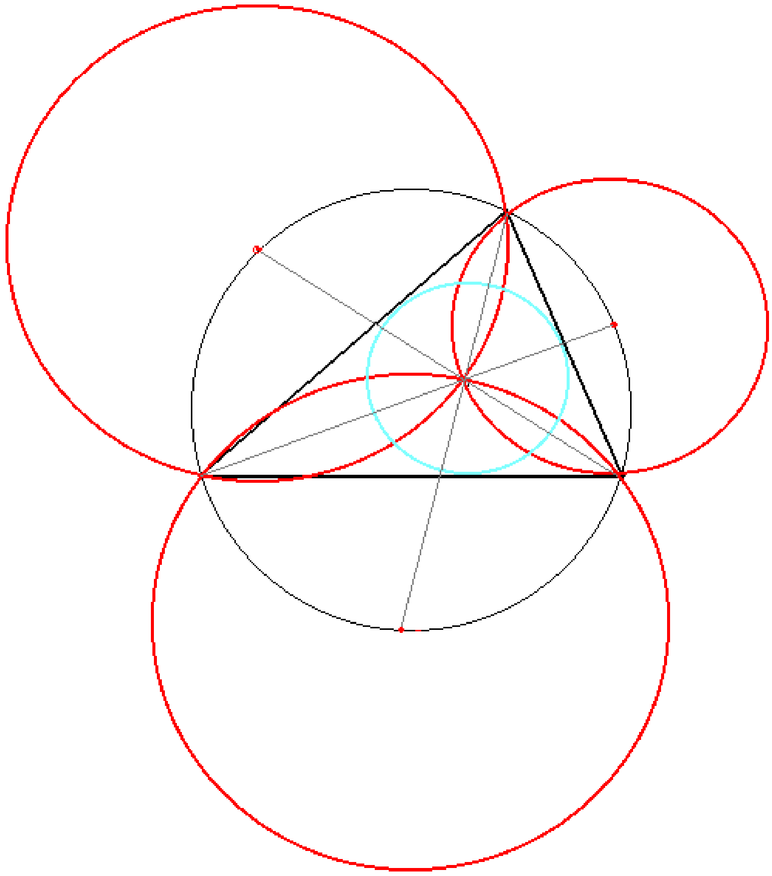
三角形の外接円から内接円を作図する方法

中川宏

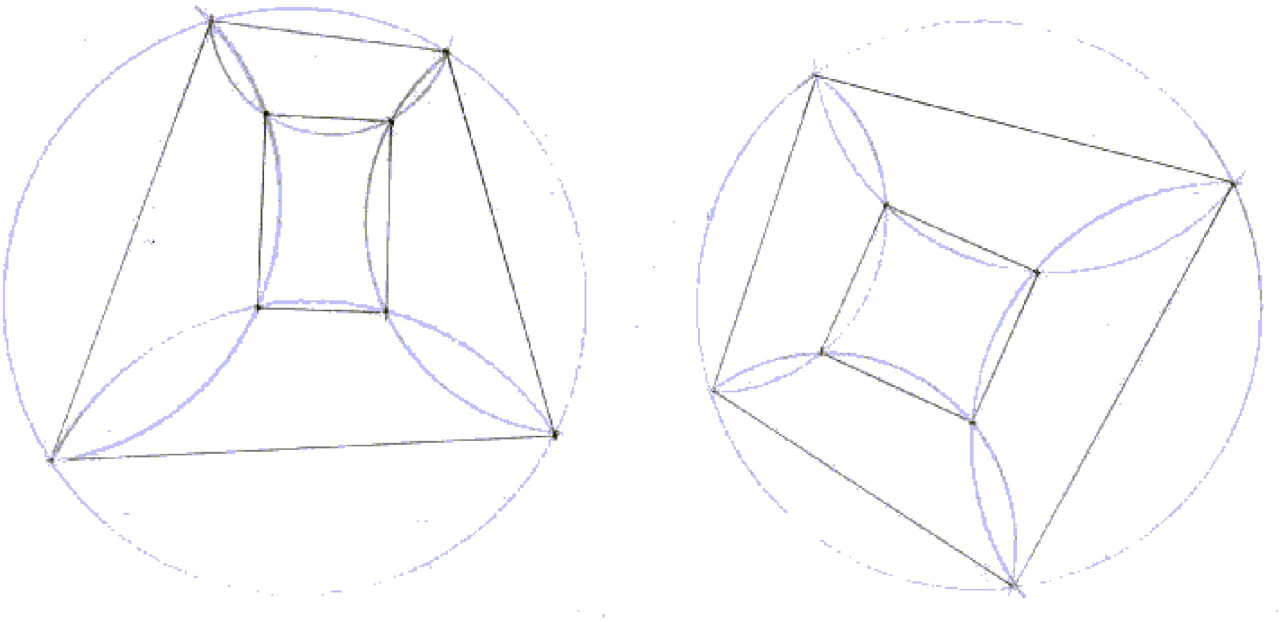
三角形の3辺に円を立てるやり方をいろいろ試しているうちに、三角形の外接円の円周上から2頂点を通る円を描くというやり方があることに気がつきました。
すると、それら3つの円は一点で交わり美しいデザインを構成したのです。

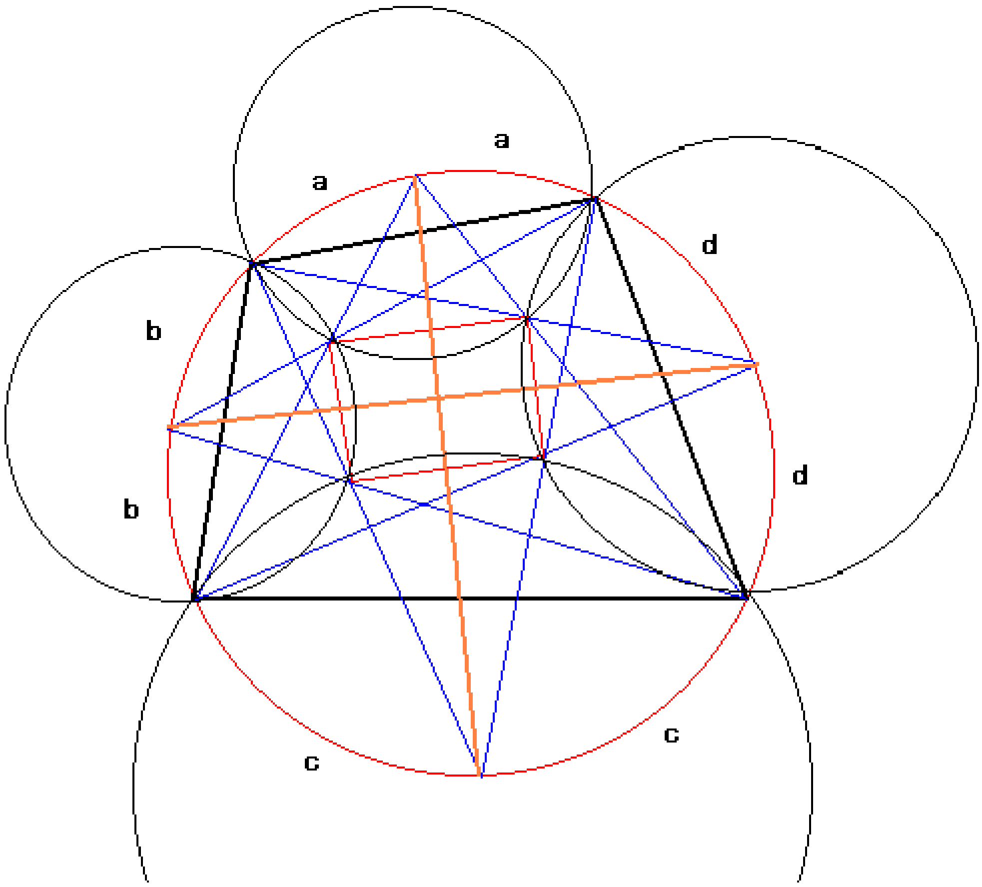




3円の交点は三角形の内接円の中心でした。
そのことは3つの赤い円の中心が、2頂点をむすぶ円弧の二等分点であることから、円周角の定理により簡単に確認できます。

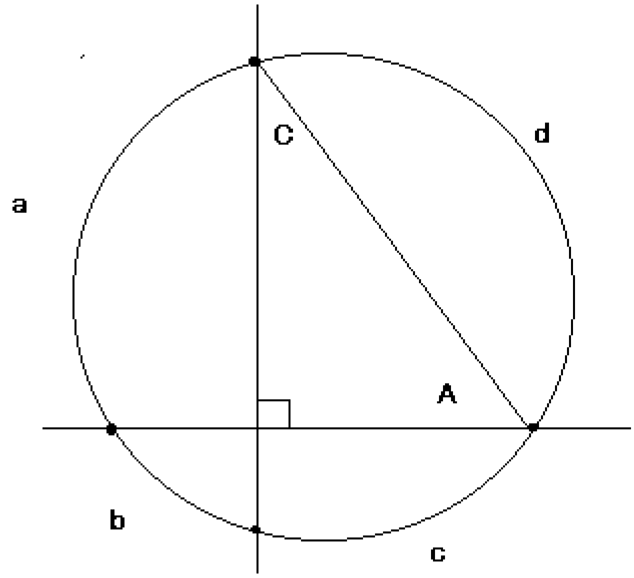
同様の操作を円に内接する四角形にたいして行ってみました。
すると驚いたことに、4つの円の4交点は長方形を描きました。





上の図において、同じ長さの円弧にたいする円周角の大きさは等しいことから、中央の赤い四辺形の外側に立つ4つの三角形は二等辺三角形であり、頂角から底辺に伸びる赤い線は頂角の

二等分線であることがわかります。したがって赤い四辺形の向かい合う辺どうしは交差する二等分線に直交し互いに平行です。
さて、二本の赤い線が直交しているかどうかですが、一つの円の二本の弦が直交するのは、
次のときです。



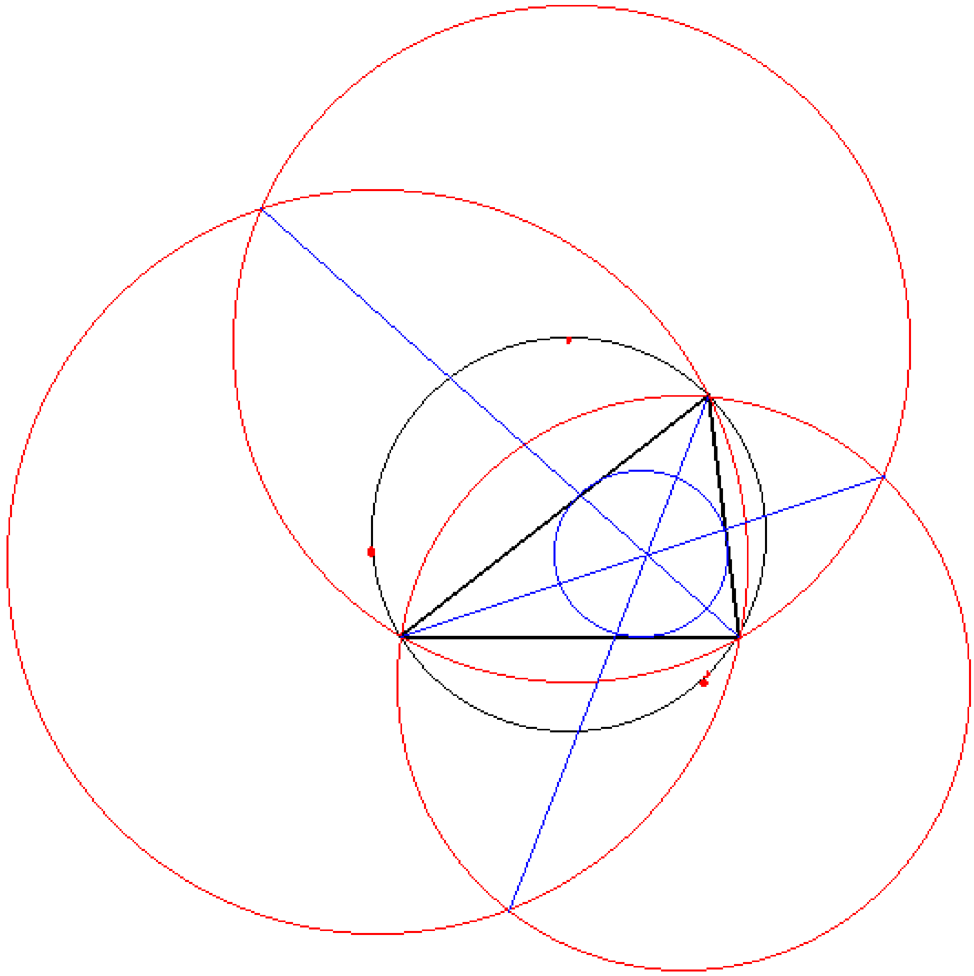
∠A＋∠C＝90°
このとき円弧 a+c=b+d＝円周／2

そこで、元の図をみると、
a+b+c+d= a+b+c+d
となっていますから、たしかに二本の弦は直交していて、赤い四辺形は長方形であることがわかります。

三角形の外接円から内接円を作図する方法（その2）

中川宏

（その１）では三角形の外接円の円周上の点から、近い2つの頂点を通る円を描きましたが、今度は遠くの2頂点を通る円をえがいてみました。

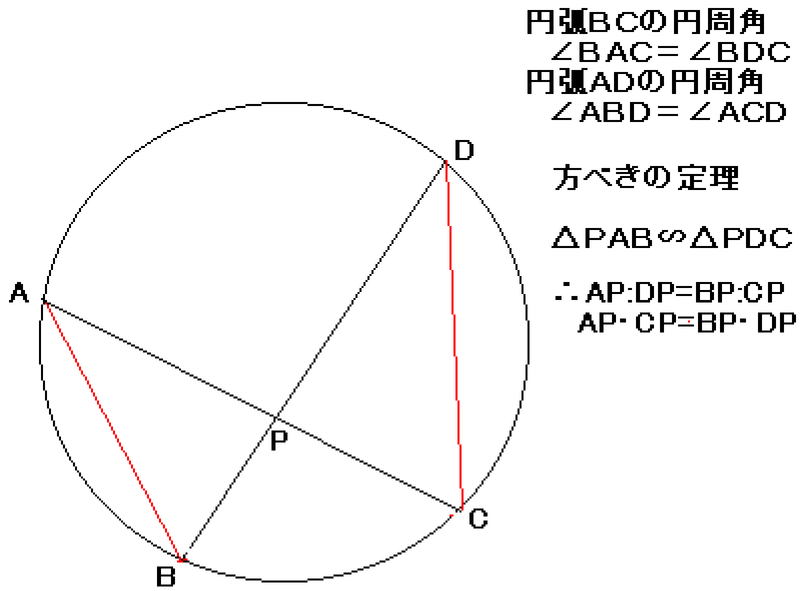


その3つの円の2つずつの交点を結ぶ線分が一点で交わることは、3つの円の共通弦定理とよばれていて当然ですが、この場合、3つの線分の交点は三角形の内接円の中心（内心）となるようです。
しかし証明ができなくて弱っています。

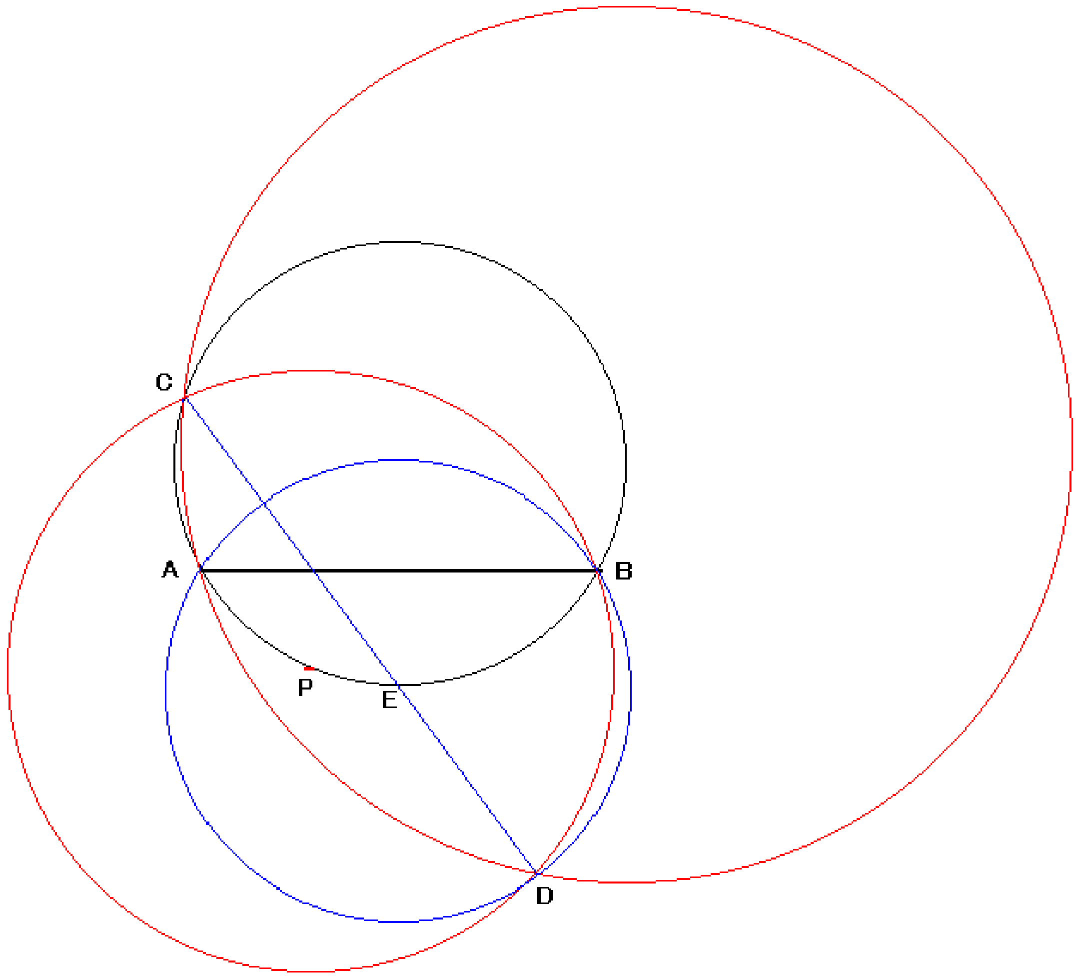
三角形の外接円から内接円を作図する方法（その3）

中川宏

（その2）では三角形の外接円の円周上から描いた、遠くの2頂点を通る3つ円の共通弦の交点が三角形の内心となるらしいことを示したのですが、その証明は円周角の定理や方べきの定理などを試してもうまくいきません。



そこで3つに分解して考えてみました。



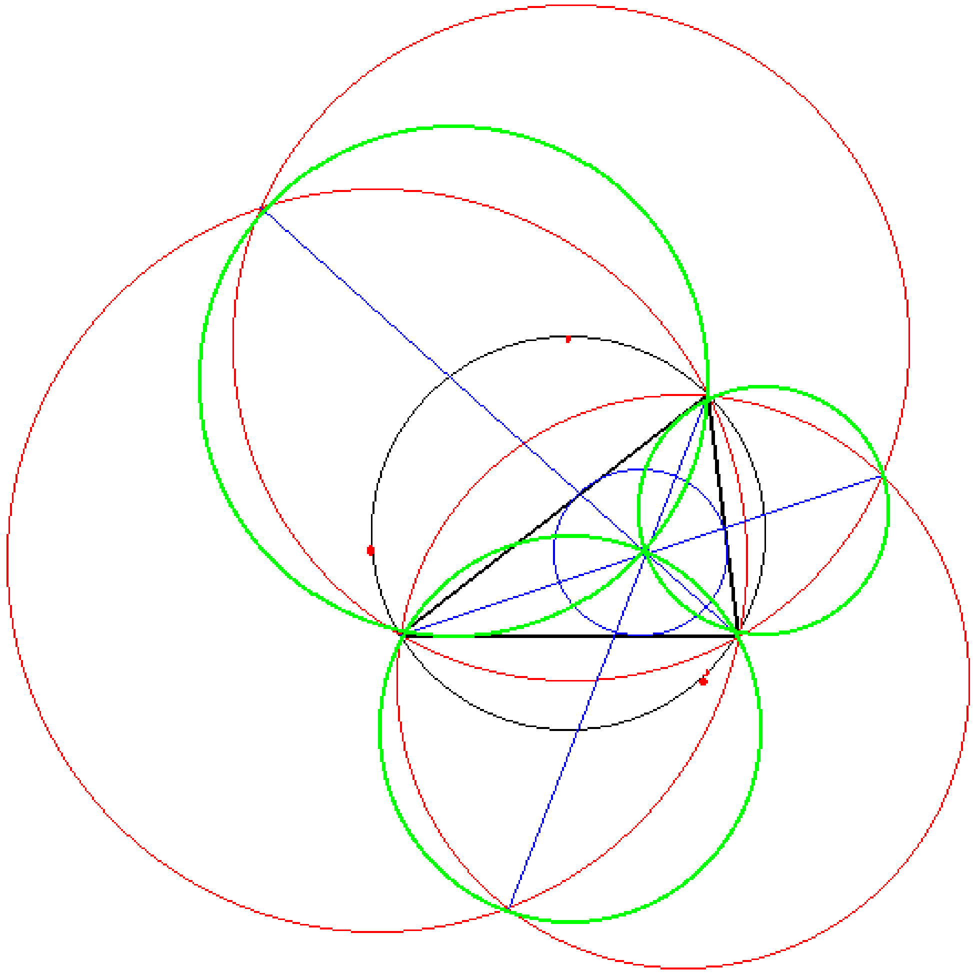
円とその弦ABがあるとき、円周上の任意の点Pを中心としてBを通る第2の円が最初の円と交

わる点をCとします。第１の円周上の点を中心としCとAを通る第３の円を描きます。第２と第３の円の交点をDとすると、線分CDは円弧ABを点Eで二等分するようです。

　このことが証明できれば、共通弦が三角形の内角の二等分線ということになるわけです。

　さらに点Eを中心とする円周上にA，B，Dがのるらしいことにも気付きました。

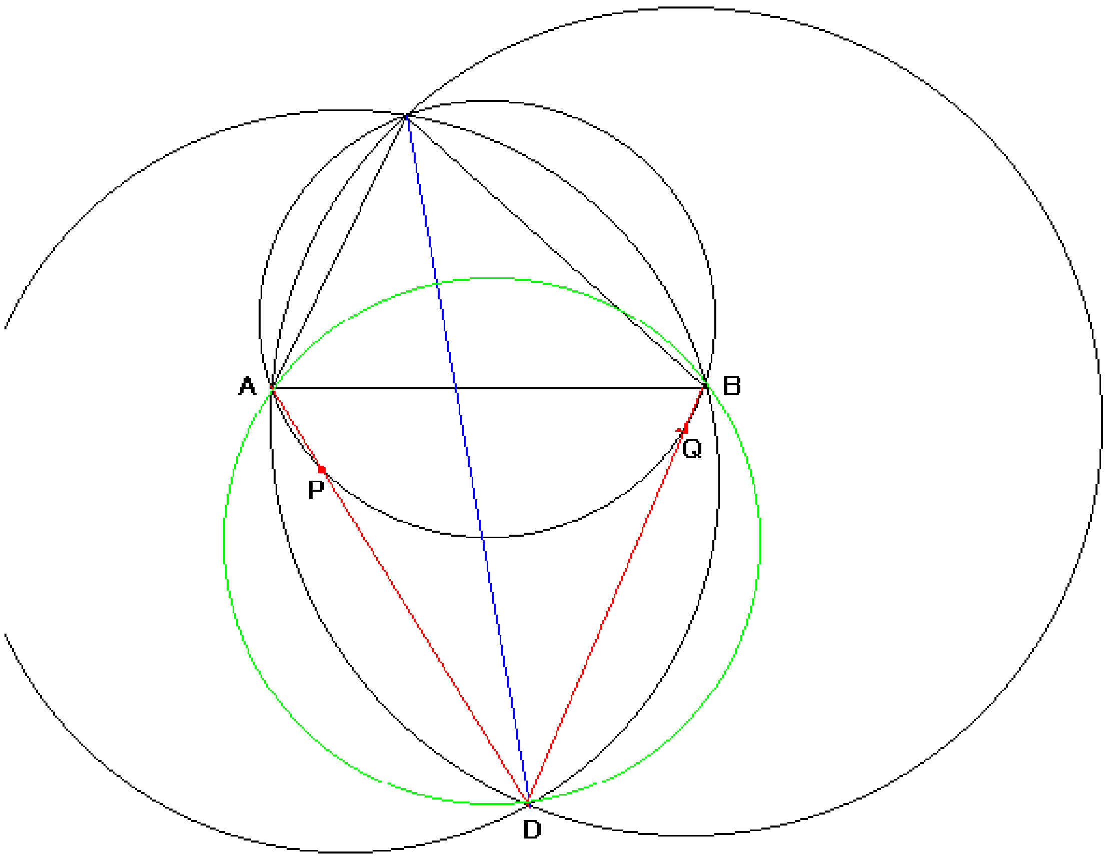
したがって、その２の図は次のようになります。



三角形の外接円から内接円を作図する方法（その４）

中川宏

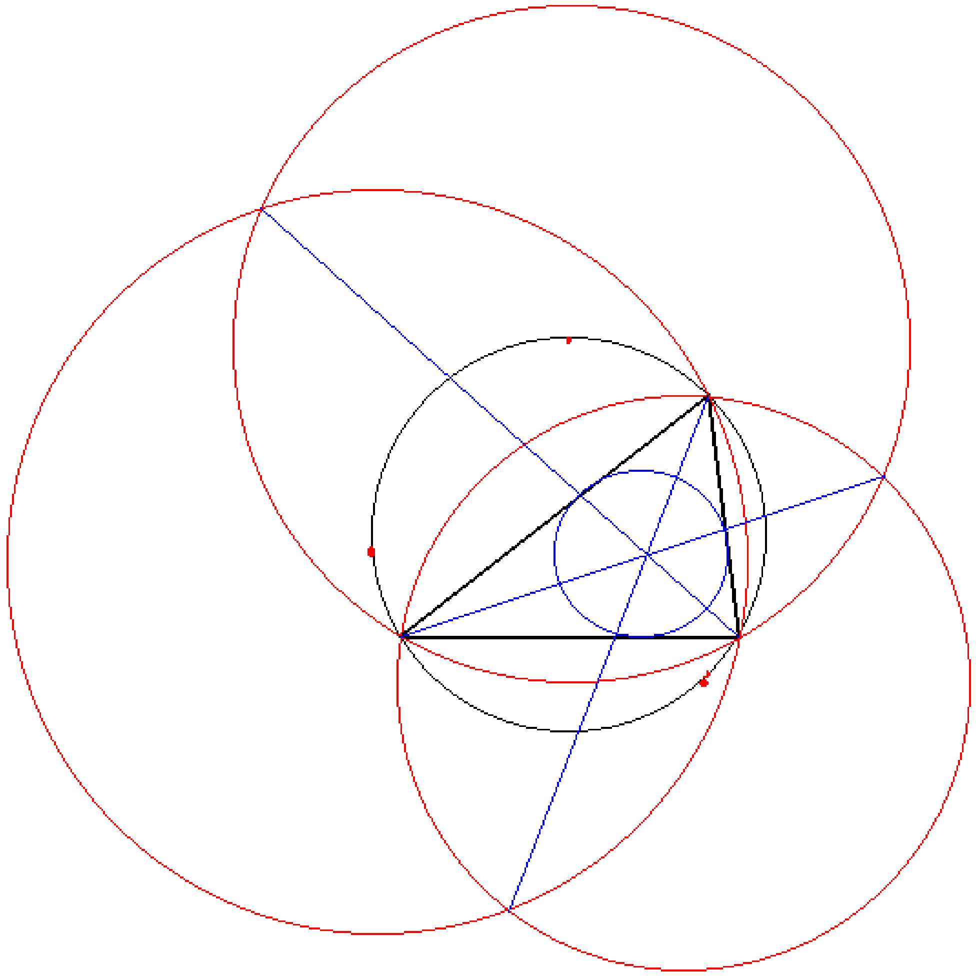
さらに不思議なことに、第２の円の中心Pと第３の円の中心Qがともに短い円弧AB上にある場合には、それらは線分ADとBDの上にあるように見えます。

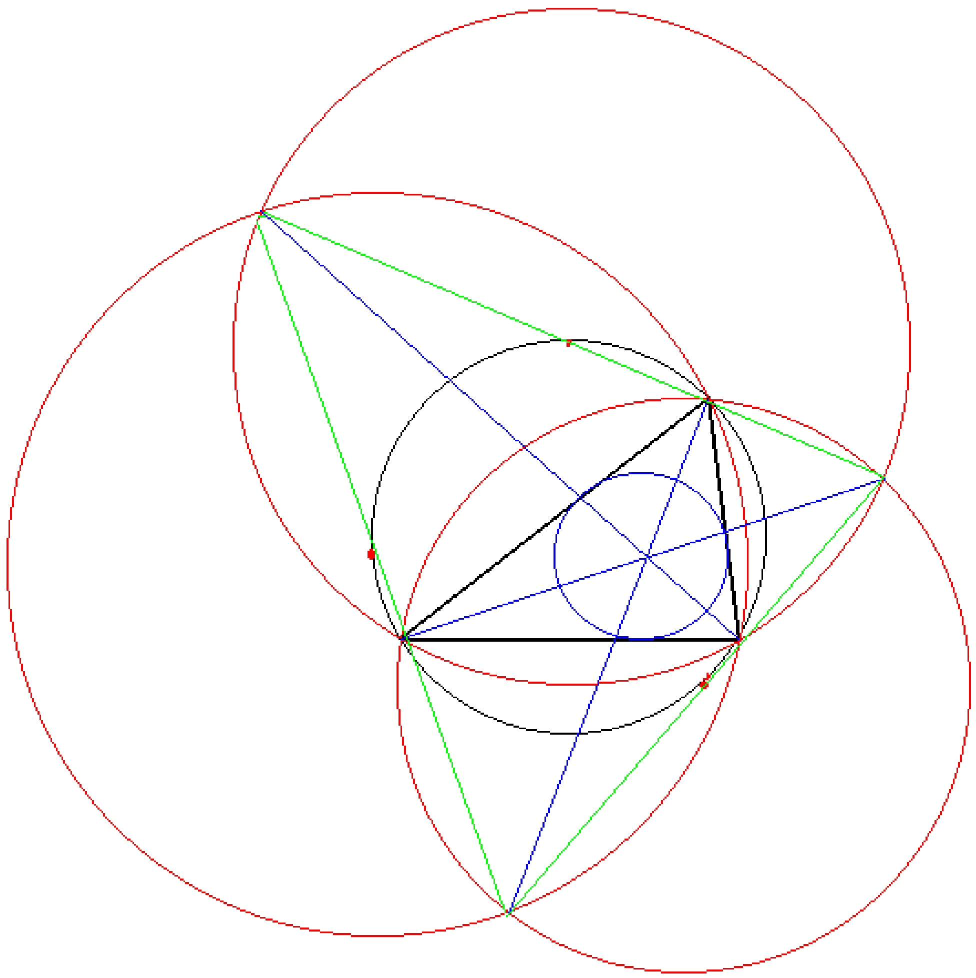


三角形の外接円から内接円を作図する方法（その５）

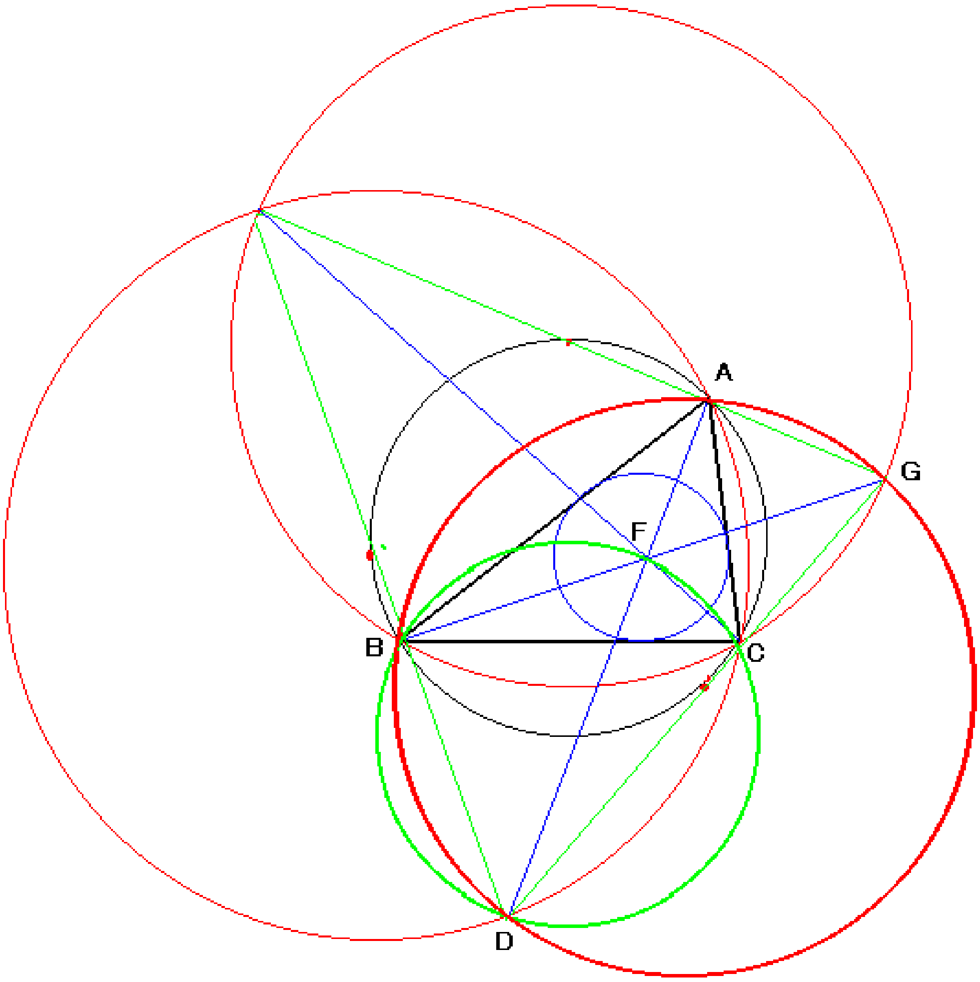
中川宏

（その４）の観点から最初の図を見直してみました。
赤い円の中心と青い線分の両端の点はすべて3つの線分上に乗るように思えます。





この緑の線分はそれぞれ3つの円の直径ですから、青い線分とは直交しており、したがって青い線分の交点は緑の三角形にとっては垂心ということになります。
そこで、似たような図はないかと探してみたら、「なぜ初等幾何は美しいか」（イヴォンヌ＆ルネ・ソルテー著、東京出版）34～6pにありました。黒い三角形は緑の三角形の垂心三角形と呼ばれているそうです。
ソルテーの論述は、緑の三角形→青い垂線→黒い三角形となっていて、私の
黒い三角形→黒い円→赤い円→青い線→緑の三角形とは、方向が逆になっています。したがって私の課題にとっては答えから問題を解くようになってしまいますが、ソルテーの証明を当てはめてみます。



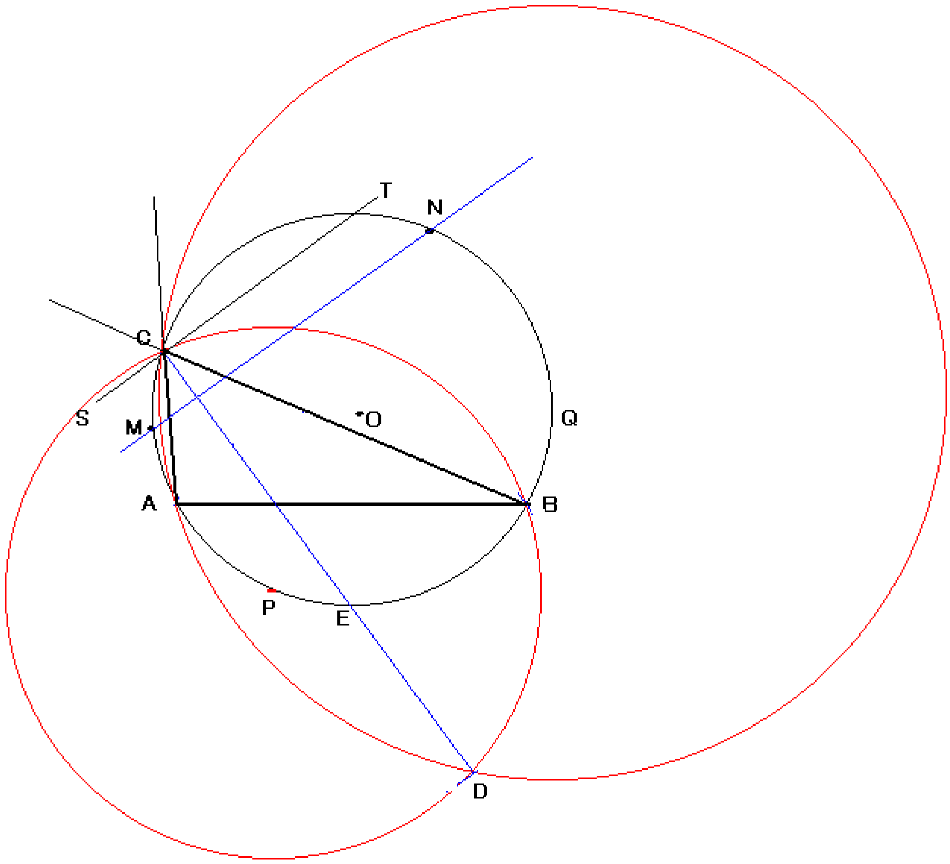
太くした赤い円と緑の円に注目します。
BとCが垂線の足なので、DCFBはDFを直径とする円周上にあります。よって円周角FBC＝FDC
また、AとBが垂線の足なので、DGABはDGを直径とする円周上にあり、
円周角ABG＝ADG
しかし円周角ADG＝FDCなので、
∠FBC＝∠ABG(F)
であり、線分BGは∠ABCを二等分しています。

三角形の外接円から内接円を作図する方法（その６）

中川宏

（その３）円とその弦ABがあるとき、円周上の任意の点Pを中心としてBを通る第２の円が最初の円と交わる点をCとします。第１の円周上の点を中心としCとAを通る第３の円を描きます。第２と第３の円の交点をDとすると、線分CDは円弧ABを点Eで二等分するようです。

このことを自力で証明することができなかったので、一松先生にお願いして教えていただきました。



１０月１７日付けのお手紙拝見いたしました。いろいろと円を描いて面白い結果を探しておられるのに感心しています。但し少々色々な円を描きすぎてかえって本質を解りにくくしていらしたように感じました。

確かに貴兄の予想されたとおり、Ｅは円弧<u>ＡＢ</u>の中点であり、Ｆは内心、ＣＤと円Ｅとの他の交点[Ｄ]は∠Ｃ内の傍心です。

その証明には、図を簡潔にして次のように考えるとよいでしょう。

<u>**補助定理**</u>

円に内接する三角形ＡＢＣについて円弧<u>ＡＣ</u>、<u>ＢＣ</u>の（他の頂点と反対側の）中点をM, Ｎとする。直線MNは∠Ｃの外角の二等分線ＳＣＴに平行である。

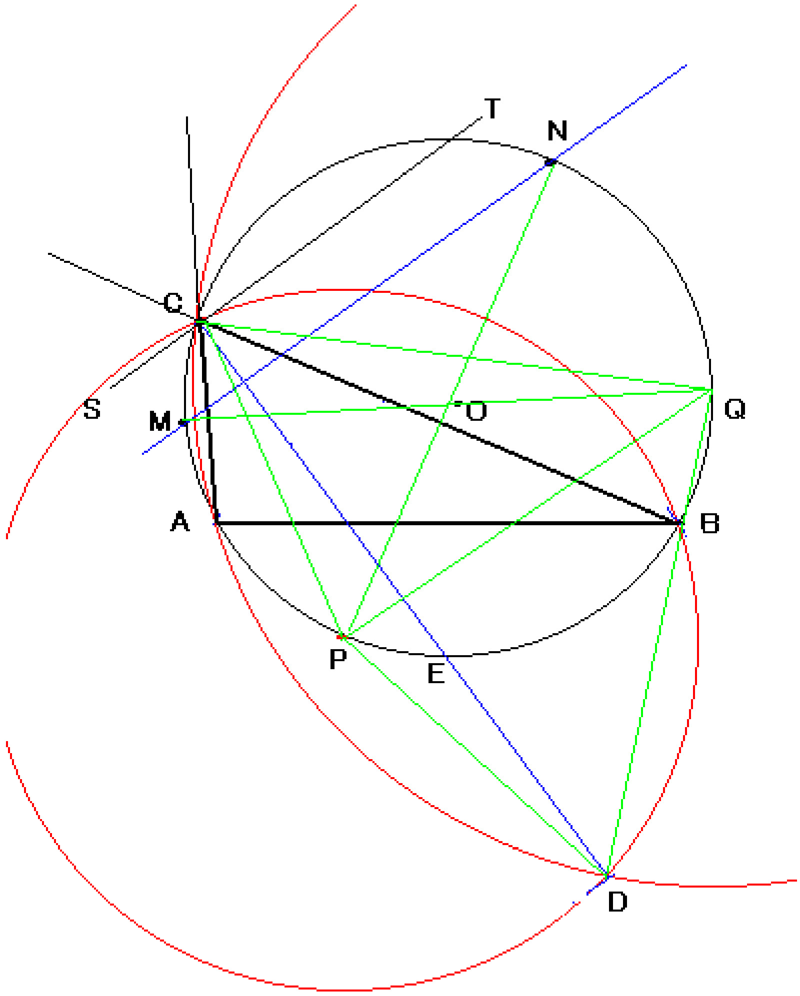
証明

∠ＳＣＡ＝１／２∠Ｃの外角＝π／２－Ｃ／２である。

∠ＭＣＡは弧<u>ＭＡ</u>上の円周角だが、<u>ＭＡ</u>＝１／２<u>ＣＡ</u>なので<u>ＣＡ</u>上の円周角∠Ｂの半分に等しい。したがって

∠ＳＣM＝∠ＳＣＡ－∠MＣＡ＝π／２－Ｃ／２－Ｂ／２＝Ａ／２である。
他方、∠ＣMNはＣＮ上の円周角だが、ＣＮがＢＣの半分なので、ＢＣ上の円周角∠Ａの半分に等しい。すなわち∠ＣMN＝Ａ／２＝∠ＳＣＡ
だからＳＣはMNに平行である。

さて、貴兄の作図で円ＣＢＤの中心Ｐは円周上Ｂ，Ｃから等距離の点なのでＮの対点（直径の他端）です。同様にＱはMの対点です。



ＭＮＱＰは各内角が直角で長方形であり、ＰＱ//ＭＮ//Ｃの外角の二等分線です。作図により、ＣＰ＝ＰＤ、ＣＱ＝ＱＤで四角形ＣＰＤＱは凧形であり、その対角線は互いに直交します（二等辺三角形△ＣＰＤについてＣＤの垂直二等分線がＰＱ）。
したがってＣＤは∠Ｃの内角の二等分線であり、円周との交点ＥはＡＢの中点になります。　■

Ｅを中心としてＡ，Ｂを通る円が直線ＣＥＤと交わる点が内心と∠Ｃ内の傍心であることは、逆に先便に記したとおり、内心Ｉと∠Ｃ内の傍心ＪとがＥからＥＡ＝ＥＢの距離にあること（△ＡＥＩが二等辺三角形　ＥＡ＝ＥＩであること）などを示して証明できます。　■

気がつけば難しい内容ではありませんが、余り多くの円を描いたためにかえってわかりにくくなった感じを受けました。上記の証明は、「余分」な線を除いて何を示せばよいか、と簡略化して気付いたものです。
とりいそぎお返事まで。

なかなか租借出来ませんが、内角の二等分線が外角の二等分線と直交すること、凧形の対角線が直交することなど、予想もしなかった展開に驚くとともに、初心者にもていねいに説明してくださる一松先生の素晴らしさにあらためて感謝いたしました。