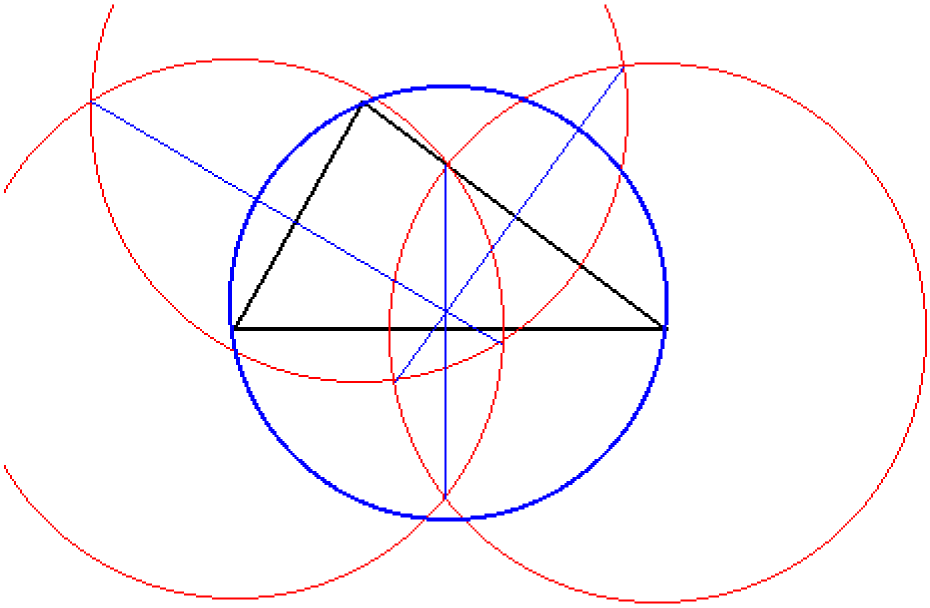
3つの円の共通弦と三角形の5心

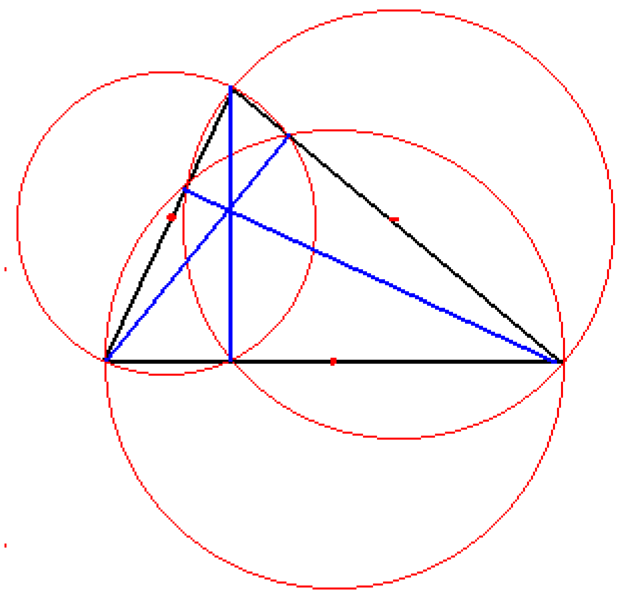
中川宏

三角形に円を描いていくうちに、三角形の5心とよばれるもののうち最もなじみのない傍心まで出来ていたことを一松先生に教えていただいた。
それによって重心をのぞく三角形の4心が、3つの円の共通弦の交点として作図できることがわかったので、まとめておきます。

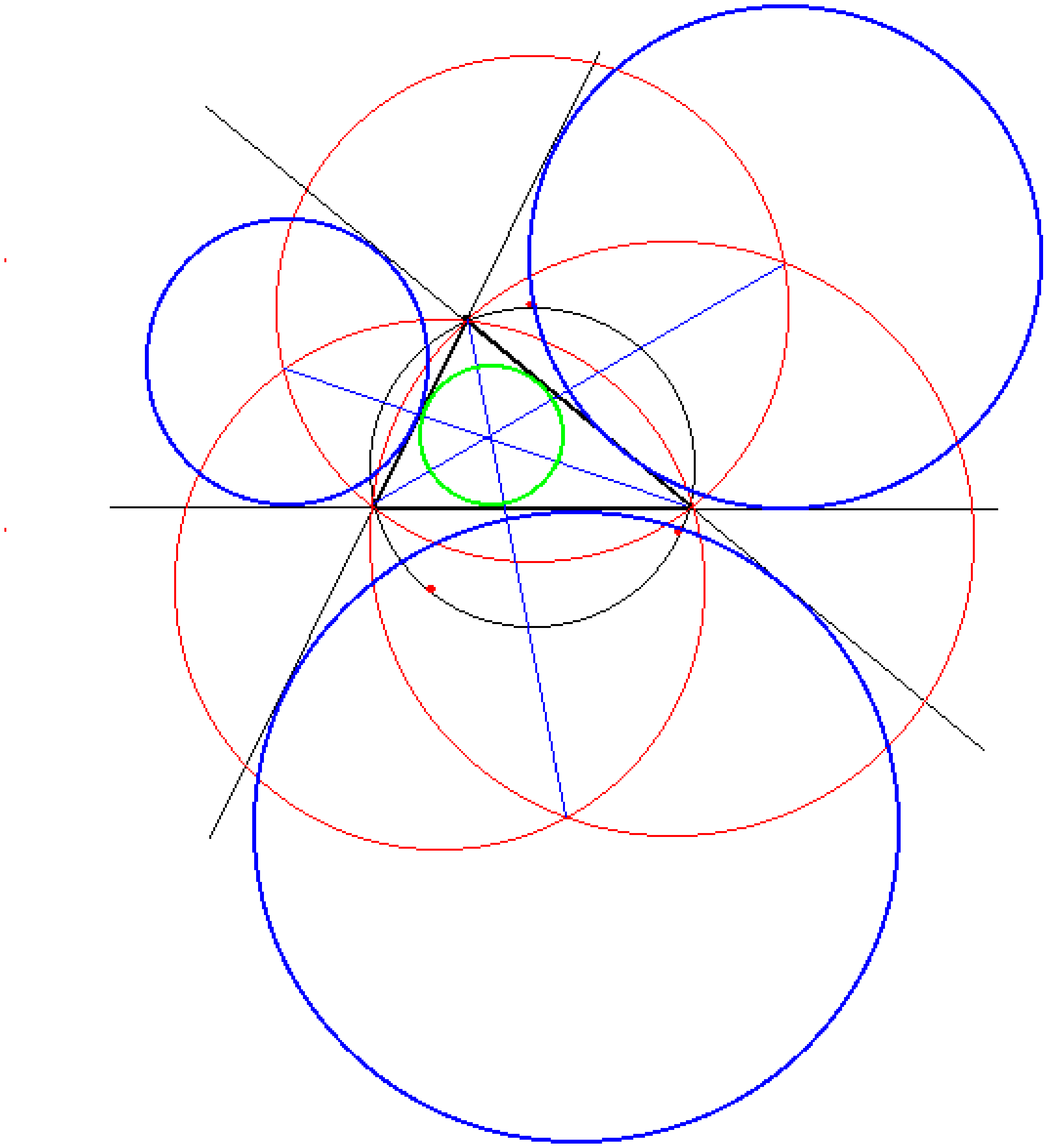
（1）外心・・・頂点から同一半径の円を描く



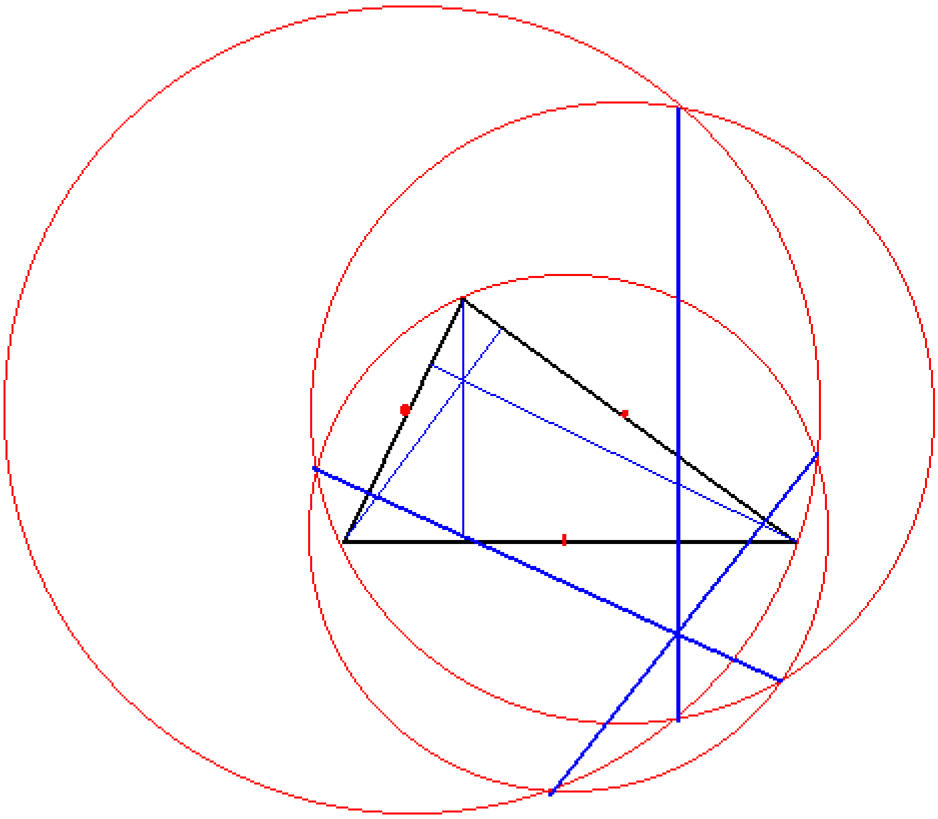
（2）垂心・・・中点から2頂点を通る円を描く



（3）内心・傍心・・・・外接円周から遠方の2頂点を通る円を描く



(付)ド・ロンシャン点・・・中点から向いの頂点を通る円を描く

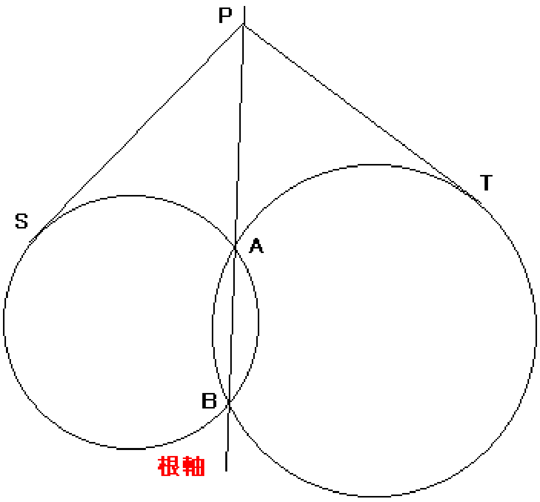


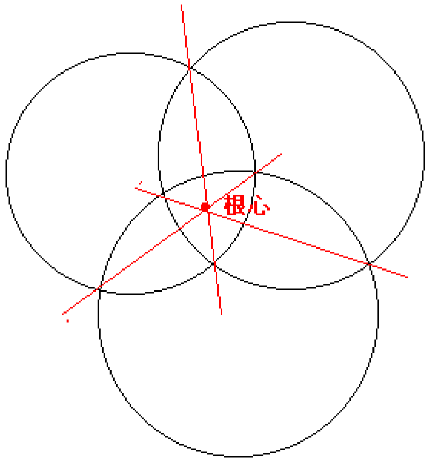
3つの円の共通弦と三角形の5心（その2）

中川宏

（その1）について一松信先生から、前提的に知っておくべき事柄と、発展的な方向についてお便りをいただきましたので、紹介させていただきます。

①、相交わる2円の交点を結ぶ直線は両円の根軸と呼ばれます。





交点をA，B、線分ABの延長上の点Pから両円に接線PS，PTを引けば、

PS^2＝PA・PB＝PT^2で、PS＝PTです。

逆にそういう点Pは根軸の延長上の点に限ります。

線分AB上の点Pについても、両円に「虚」の接線を引いたとみなして、PS＝PTが成立します。方程式でいえば、

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を $x^2+y^2-2ax-2by+(a^2-b^2-r^2)=0$ と書いて、

$x^2+y^2-ux-vy+c=0$とし、他の円を $x^2+y^2-u'x-v'y+c'=0$としたとき、両方の差をとった直線$(u-u')x+(v-v')y-(c-c')=0$ が根軸です。

話の枕が長くなりましたが、3個の円が互いに交わっているとき、2個ずつの円の共通点を結ぶ根軸3本は同一の点で交わります。この点は3円の根心とよばれています。図形的には、3個の円に「虚」の接線を引いたとき、それらの「長さ」が全て等しい唯一の点です。また方程式で円を

$x^2+y^2-u_ix-v_iy+c_i=0$ （i=1,2,3)としたとき、2個ずつの差

$(u_1-u_2)x+(v_1-v_2)y-(c_1-c_2)=0$

$(u_2-u_3)x+(v_2-v_3)y-(c_2-c_3)=0$

$(u_1-u_3)x+(v_1-v_3)y-(c_1-c_3)=0$ （これらは独立でない。はじめの2式の差が第3の式。）

の共通解を表します。

②、三角形の色々な「心」を三角形に付随した3円の根心として表そうという着想は有意義と思います。傍心は内心の「共役点」であり、内心に関する性質を少し修正すれば傍心になる場合が多いので、別段「不思議」ではないと思います。（単に今日の学校教育において忙しすぎるので傍心を軽視している？だけではないかと思います。）
垂心の等長共役点に相当する de Longchamps 点も垂心と同様の考え方で得られるという注意は興味がありました。
しかしこの表現は個々の「心」の性質に依存するようなので、「一般性」に乏しい印象です。早い話、重心に対してどうか？いろいろ考えてみましたが、「面白い」結果は得られませんでした。重心は Affine 幾何学的対象であり、かえって円とはなじみが薄い（？）のかもしれません。
もう少し他の「心」についても検討してみたいと存じます。（つづく）

３つの円の共通弦と三角形の５心（その３）

中川宏

一松先生からのお手紙続報を紹介します。

その後若干気付いた点をご一報します。但し三角形の重心座標を使うので、その説明は省略します。（「理系への数学」の本年１月号～７月号に連載した私の記事で若干解説しました。）
△ABCの３辺の長さを $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$ とおきます。重心座標によると円は
$(x+y+z)(ux+vy+wz)=a^2yz+b^2zx+c^2xy$ （u,v,w は定数で円を表す助変数）と表されます。
$(u_i,v_i,w_i)(i=1,2)$ という2円があるとき、両者の差
$(u_2-u_1)x+(v_2-v_1)y+(w_2-w_1)x=0$
で表される直線が両円の根軸です。（両円が交わるか否かを問わず）
$i=1,2,3$ と3円があるときには、３本の根軸は同一点（根心）で交わり、その点の重心座標は

$$\begin{vmatrix} 1 & v1 & w1 \\ 1 & v2 & w2 \\ 1 & v3 & w3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u1 & 1 & w1 \\ u2 & 1 & w2 \\ u3 & 1 & w3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u1 & v1 & 1 \\ u2 & v2 & 1 \\ u3 & v3 & 1 \end{vmatrix}$$

で表されます。実際例示頂いた諸点については（もちろん幾何学的に明らかですが）すべてこの形で表現されることを確かめました。
とすれば、逆に三角形の内部に（ξ,η,ξ）で表される（実は比のみが本質的）が与えられたとき、そこを根心とする3円は、上述の行列式の比が$\xi:\eta:\xi$になるように
(u_i,v_i,w_i)をとれば、そうなります。もちろんこれは理論的にそうなる、ということだけで

す。実際には3円を「対称」に取り、またその中心や周上の点に直接に意味があるように選ぶ必要があります。無限に多くの可能性のある中から、「うまい」値を探すのは案外にたいへんです。

例えば重心については、その重心座標が1：1：1なので、上記の3個の行列式が全て等しくなるように（u_i,v_i,w_i）をとればよいわけです。これは $u_1=v_2=w_3=$ Κ，$u_2=u_3=v_1=v_3=w_1=w_3=$ Цとおけば、行列式は等しくなります。Κ（≠Ц）とЦをうまくとって

$(x+y+z)(\text{Κ}x+\text{Ц}y+\text{Ц}z)=a^2yz+b^2zx+c^2xy$

および左辺第2項を　$\text{Ц}x+\text{Κ}y+\text{Ц}z$、$\text{Ц}x+\text{Ц}y+\text{Κ}z$ とした3円を描けば、それらの根心は重心になります。

そこまでは理論的にわかるのですが、具体的にΚ、Цをどうとれば「自然な」形になるのかよくわかりません。Цは a,b,c について対称な2次式として $a^2+b^2+c^2$ の定数倍に採るのが自然な気がします。Κを0とすれば各円は順次頂点A、B，Cを通ります。またЦ＝0とすれば各円は順次B，C；C，A；A，Bを通りますが、あまり「自然」な意味づけができません。このあたりもう少し検討してみます。（Κ＝－ЦとかΚ＝２Цとするのがよさそう？とも感じます。）

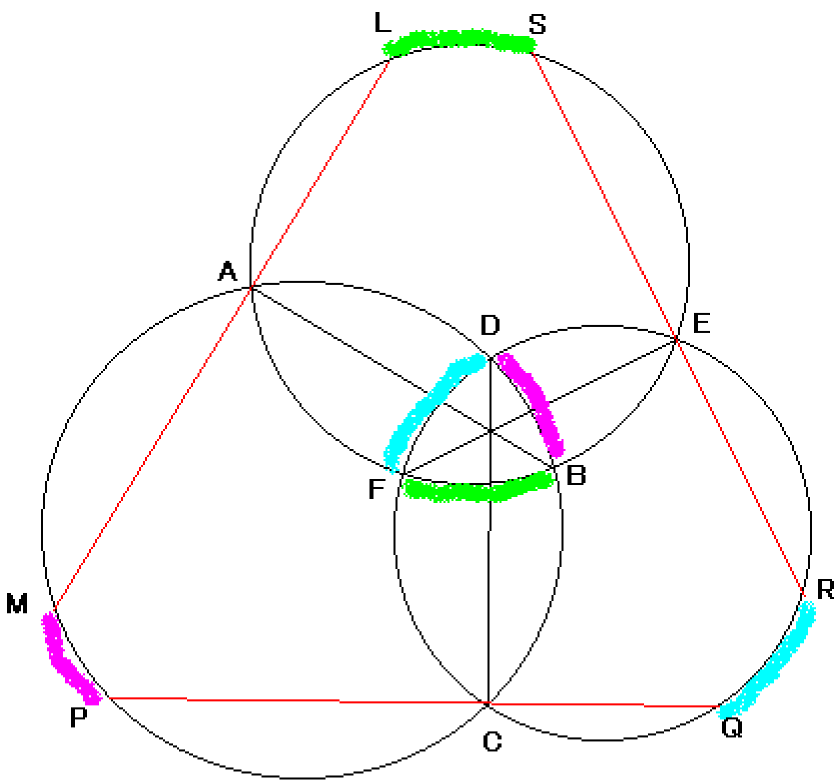
理論的には、重心も含めて「任意の」点が適当な3円の根心として表される、と言う結論で満足すべきかも知れません。しかし以上のような式を出しても、それがどのような円か、そしてその中から「奇麗な」円をどう選ぶかが次の課題です。折を見て少し考えてみます。

３つの円の共通弦と三角形の５心（その４）

中川宏

一松先生から、2円の根軸と3円の根心を教わったので、もう少し遊んでいましたら、予期せぬことに気付きました。

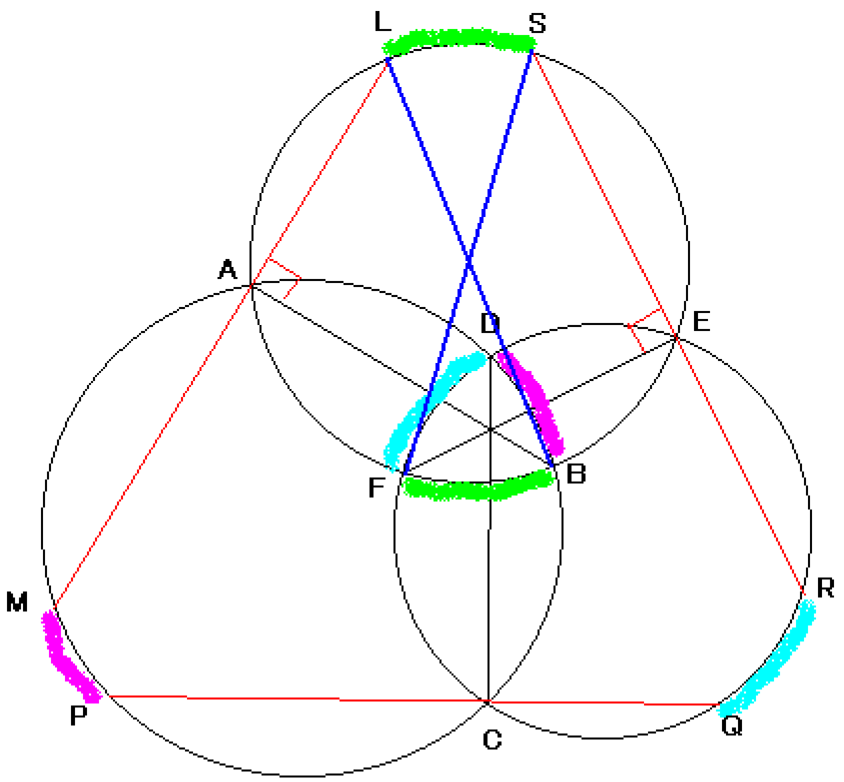
下の図のように、３つの円の外側の交点（A，C，E）を通り根軸に垂直な直線を引き、円との交点に名前をつけます。



するとどうやら、おなじ色の円弧の組み合わせにおいて、それらの長さが
FB＝LS、BD＝PM、DF＝RQ
となるようです。
このことは、3以上のn個の円であっても、中央の重なりの部分が外側に膨らんだn本の曲線ばかりで閉じている場合には成り立つようです。

3つの円の共通弦と三角形の5心（その5）

中川宏

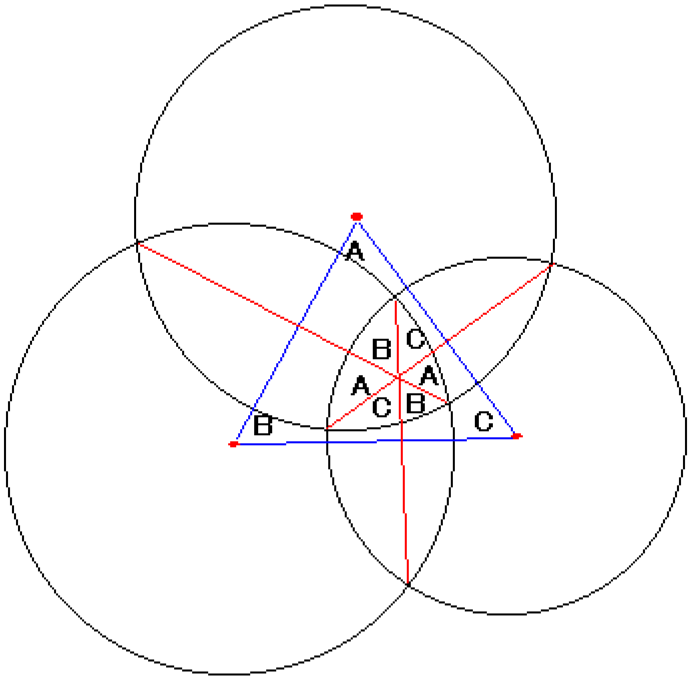


青い線分LBとSFを引きます。
このとき△ABLと△ESFはともに直角三角形なので、LBとSFはともに上方の円の直径で、交点は円の中心です。したがって円弧LS＝円弧FBです。

3つの円の共通弦と三角形の5心（その6）

中川宏

3つの円の中心を固定した場合には、それぞれの円の半径の大きさにかかわらず、3本の根軸が交差する角度は一定です。



というのは、根軸（赤い線）というのは、2つの円の中心を結ぶ線分（青い線）に対してつねに垂直だからです。

2つの円の半径を固定して、1つの円の半径を変化させると、3円の根心は固定された2つの円の根軸上を移動していきます。

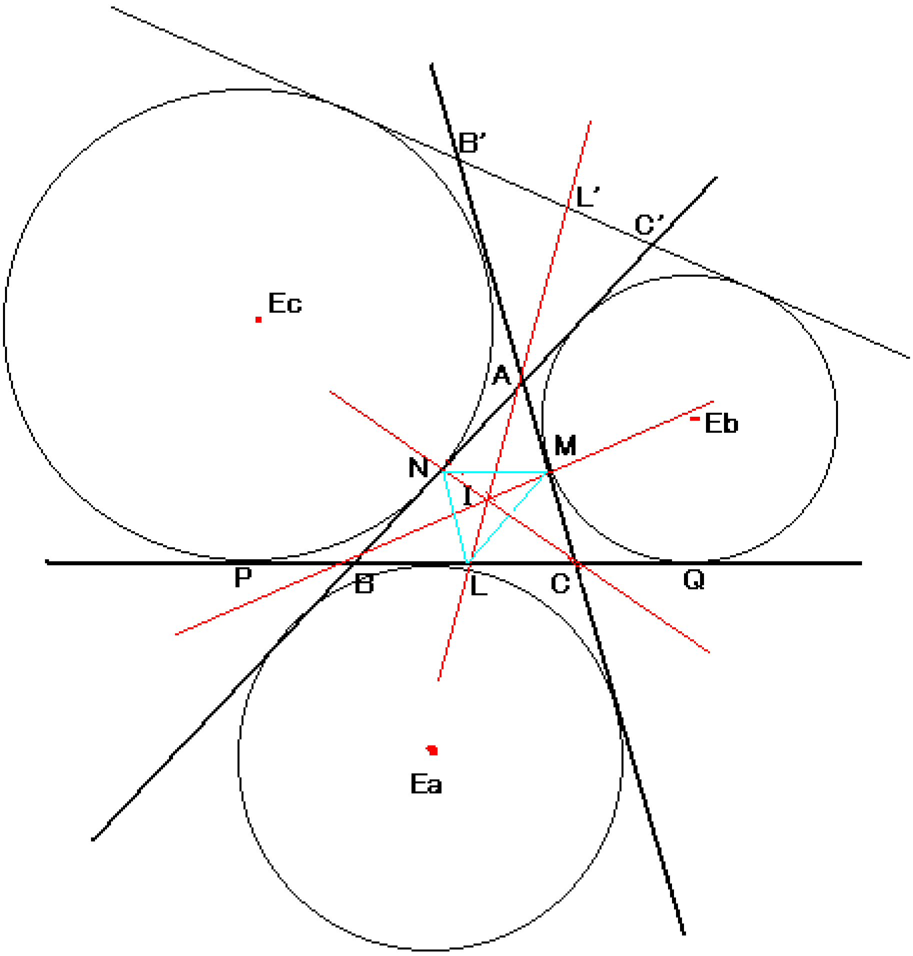
特殊に、3つの円の半径が同じときは根心は三角形ABCの外心になります。

3つの円の共通弦と三角形の5心（その7）

中川宏

三角形の3つの傍接円の根心について一松先生からお便りをいただきました。

△ABCの傍心をEa，Eb，Ecとし、中点をL，M，Nとします。



辺BCの延長はEbとEcの共通接線であり、BCの延長への接点P，Qは、CP＝BQ＝s（＝a+b+c/2）です。

さて、根軸は（2円が交わらなくても）両円に引いた接線の長さが等しい点の軌跡です。辺BCの中点Lをとると、LからEb，Ecに引いた接線（このときは共通接線）はLP，LQであり、LP＝LQ（＝s－a/2)ですから、Lは根軸上にあります。

もう一つの共通接線は両円の中心を結ぶ直線EcAEb（じつは∠Aの外角の二等分線）に対して、PQを対称に移した直線です。CAの延長上にAB‘＝ABである点B’をとり、またBAの延長上にAC‘＝ACである点C’をとれば、ちょうど直線B‘C’が辺BC

を折り返した（対称変換をした）直線です。上とおなじ理由でB‘C’の中点L‘からEb，Ecに引いた両接線は等長であり、L’は根軸上にあります。根軸LL‘は両円の中心を結ぶ直線EcAEbに垂直ですから∠Aの内角の二等分線に平行です。
△ABCの中点を結んでできる小三角形△LMNは元の三角形と相似で各辺は互いに平行です。以上の考察により、LL‘は∠MLNの二等分線になります。
以上EbとEcで論じましたが、同様にEcとEaの根軸は∠LMNの二等分線であり、EaとEbの根軸は∠LNMの二等分線です。したがってこれら３本の根軸の共通交点である根心Iは△LMNの内心となります。■
重心座標で計算するとこの点は(b+c,c+a,a+b)と表されることが計算できます。

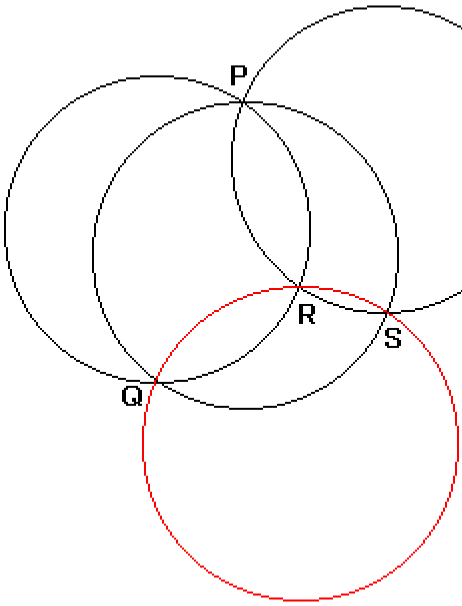
当初傍接円の（重心座標での）方程式を誤解していたために妙な値を得てしまいました。その後正しい式を得て計算しなおし、上記の値を得ましたが、漸く中点を結んでできる三角形の内心、というすっきりした理由付けを得て安心しました。
なお、中点を結んでできる三角形LMNの外心、垂心、重心は、それぞれもとの△ABCの九点円の中心、外心、重心になります。また傍心は例えば∠L内の点はEb、Ecと内接円の根心（他も同様）という意味づけもできます。最後の結果は上と同様に（議論を若干修正して）証明できます。

3つの円の共通弦と三角形の5心(その8)

中川宏

ジョンソンの定理:

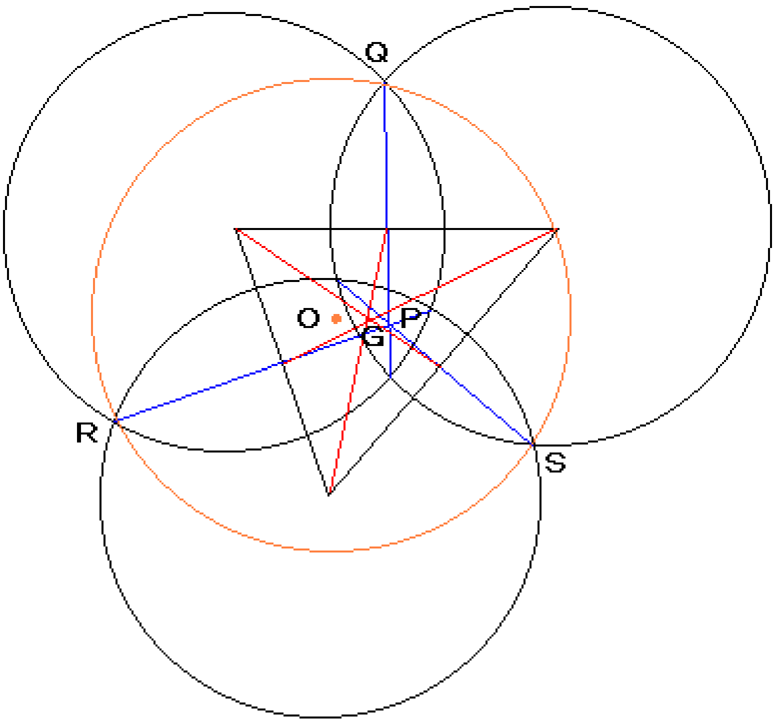
互いに 2 点で交わっているおなじ大きさの 3 円が、1 点Pを共有しているとき、他の 3 つの円の交点(P, Q, R)はおなじ大きさの別の円の上に存在している。



という美しい定理が発見されたのが1916年頃だというのは、初等幾何の奥深さを象徴する逸話でしょう。

さて、3つのおなじ大きさの円が4点ではなく一般に6点で交わっているときには、どのような関係があるでしょうか。

右の図において、

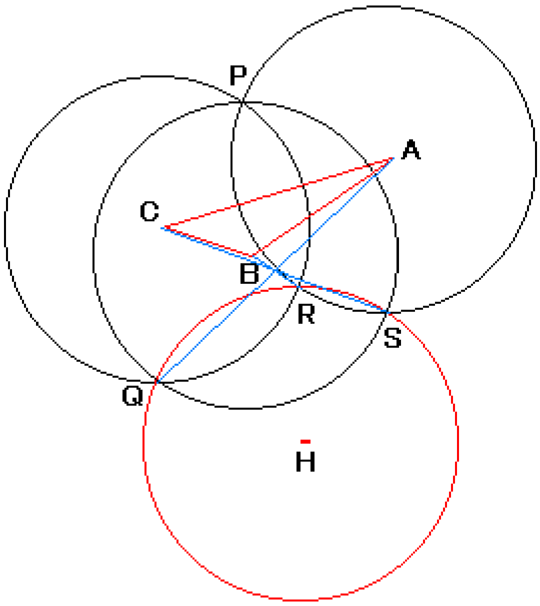


点Pは3本の根軸の交点つまり根心です。
点Gは3つの円の中心からなる三角形の重心です。そして、
点Oは3つの円の外側の交点P，Q，Rを通る円の中心です。

すると、R，G，Oは一直線上に並んでいるようにも見えます。また、ひょっとすると点Gは線分POの中点かもしれません。
しかし定規とコンパスによる作図には誤差がつきまとい、確かめる術がないと感じましたので、一松先生のお力をお借りすることにしました。

一松先生からのご回答

1．第1の形（3円が同一点Pを通る）のとき、他の交点Q，R，Sを通る円の中心は、3円の中心A，B，Cの作る三角形の垂心でした。
このときAQ，BR，CSは共通点で交わり、それは△ABCの九点円の中心（外心と垂



心の中点）になります。

2．一般の場合、内側の交点Q‘，R’，S‘をも考えて、交点の組み合わせ計2^3＝8とおりについて、それらを通る円の中心を作りQ‘，R’，S‘を同一点Pに近づけた極限を考えると、8個の円のうち6個は△ABCの頂点および辺の中点に近づき、内側の小円は点P（△ABCの外心）、外側のQRSを通る大きい円の中心は上述の垂心に近づきます。

3. したがって円が少しずれてPを根心とする第2の形になったとき、外側の交点Q, R, Sを通る円の中心は△ABCの垂心の近くに位置します。ただしEuler線上に載るとは限りません。たまたま図によっては重心の対する外心の対称点の近くに位置することがあり（貴兄の図）ますが、その点のなるとは限らないようです。

4. 外側のQ, R, Sを通る円の中心がEuler線上に載るのはどういう場合か、など考えてみるべき課題はいろいろありますが、大体の事情は上述の解釈で一応納得できました。
たいへんかもしれませんが、やはりいくつかの図を描いて比較してみることが必要と感じた次第です。

一松 信

このように、一松先生には私が見当違いをしてしまった原因まで明らかにしていただきました。ほんとうにありがとうございました。