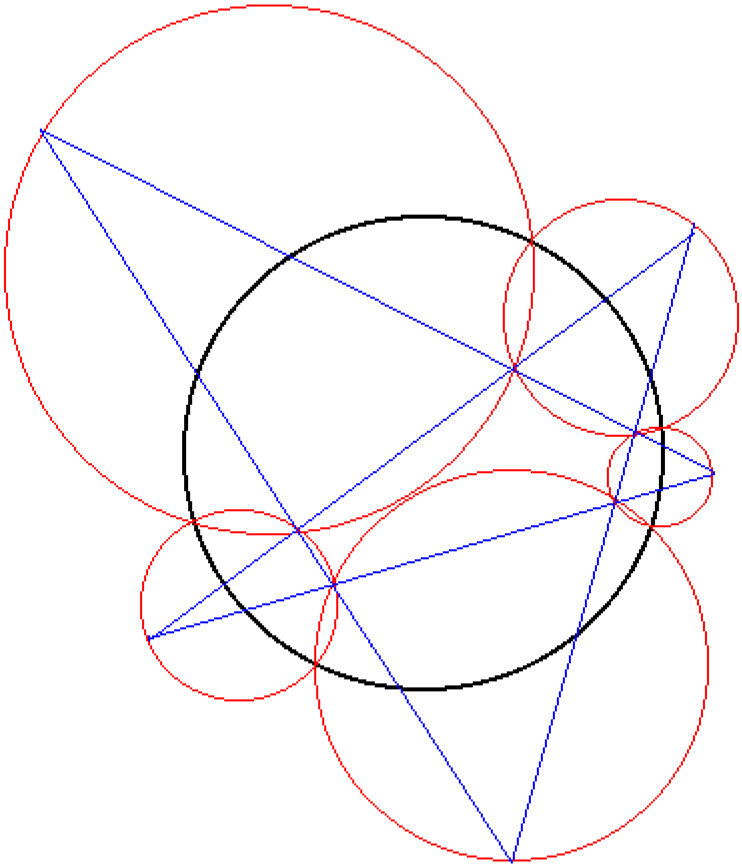
円と星形の定理

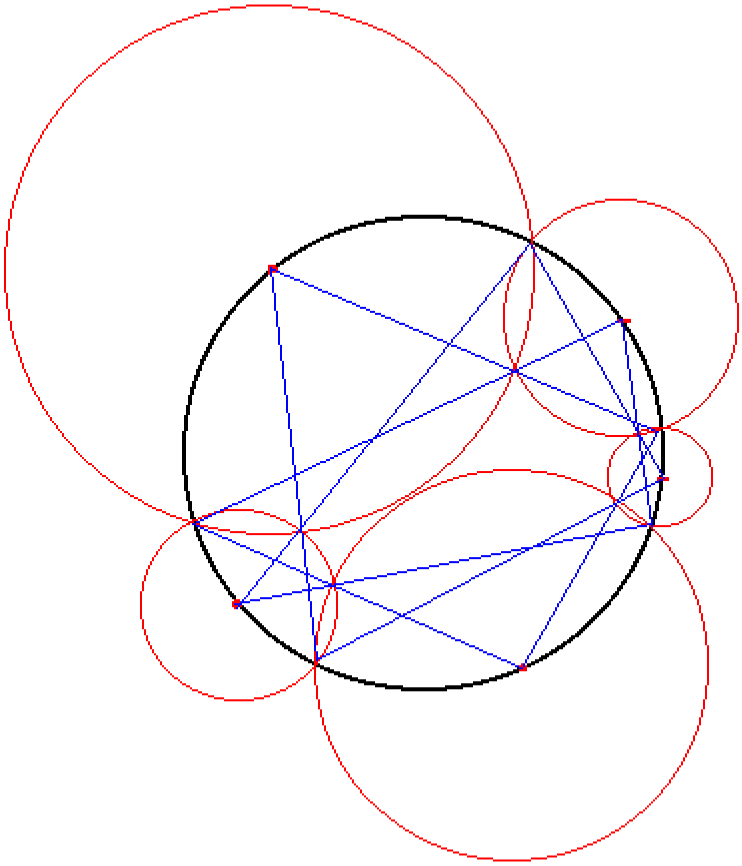
中川宏

「不思議おもしろ幾何学事典」9pに5つの円の定理という不思議な定理が載っています。

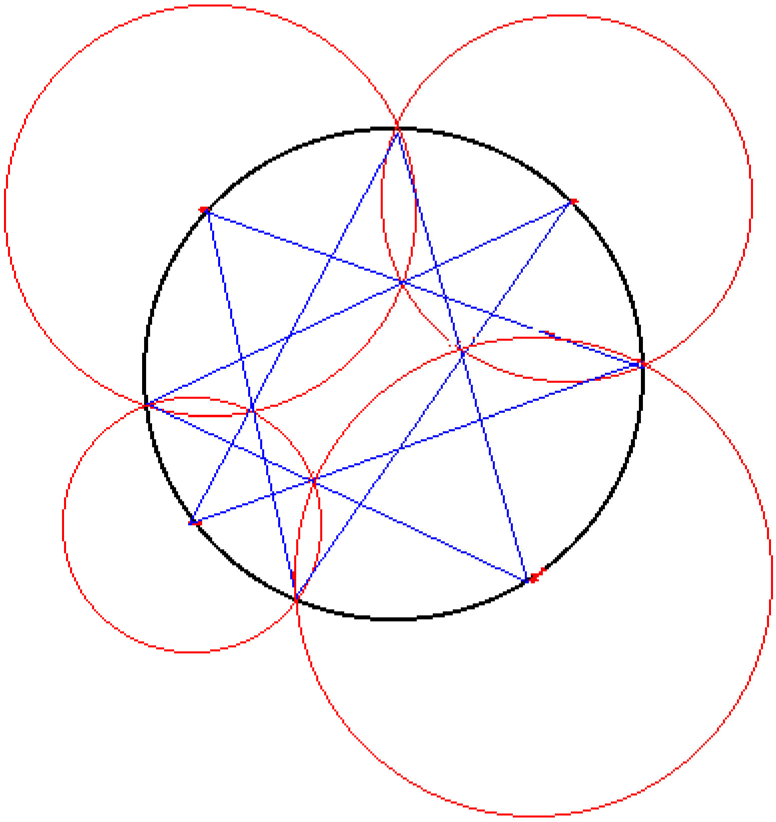


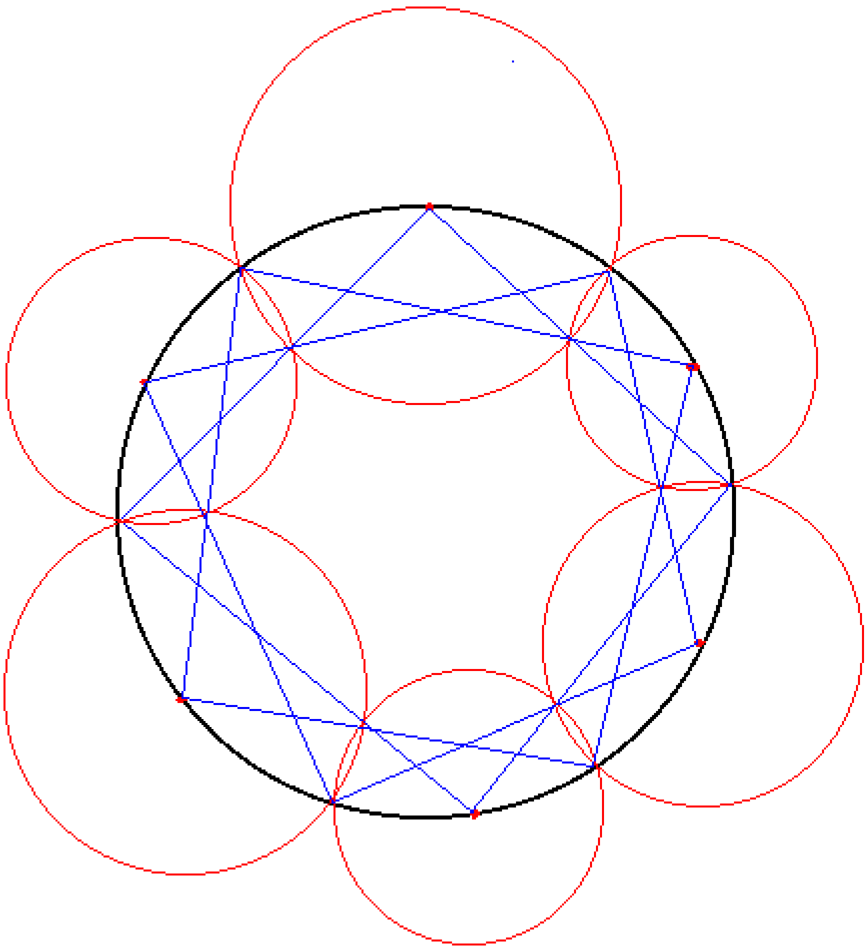
同一円周上を中心とする任意の大きさの円を5つならべて、円周上で交差するように置くと、円周上にない交点を結んで上のような星形が描けるというのです。
ところがこの操作は円の数が5のときにしか成り立ちません。まるで五弁の花が自然界に多いのは多少不ぞろいでも美しくみえるからと暗示しているような不思議さです。

ところで、円の数が5以外のときを検証しているさいに、5にかぎらずどんな数でも（4以上）成り立つ定理があることに気付きました。



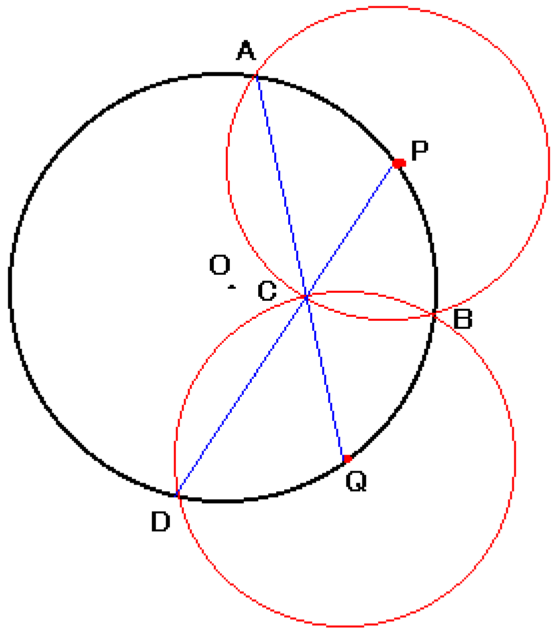
図はさきほどとおなじ円の配置ですが、赤い円の
外側の交点→内側の交点→円の中心→内側の交点→外側の交点
を結ぶ作業をくりかえすと星形が描けるのです。
円が4つと6つの場合です。





円が4つ、5つのばあいは一筆書きの星形、円が6つのばあいは3つの四角形が重なった星形です。このちがいはある頂点の3つ先の頂点を結んでいくという規則性によるものと思われます。いいかえると3の倍数の個数の円のばあいは一筆書きにならないということです。

さてこのような定理を説明するためには、つぎのようなことがらを証明できればよさそうです。



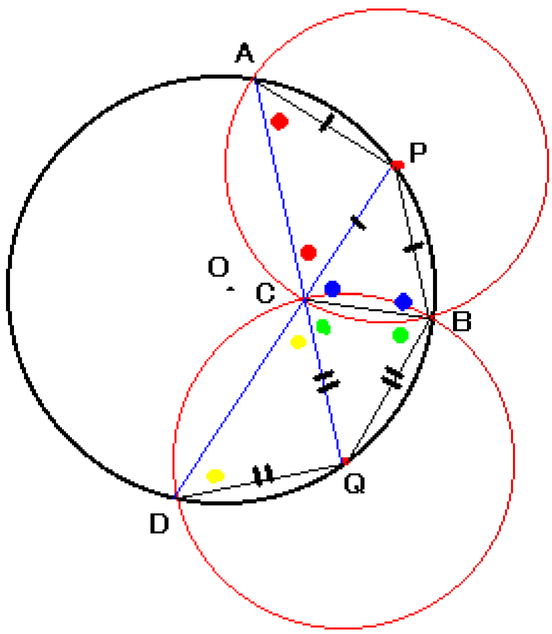
円Oの円周上の点Pを中心とする円が円Oと交わる点をA, Bとする。
円Oの円周上の点Qを中心とし点Bを通る円が円Oと交わるもう一つの点をD、円Pと交わるもう一つの点をCとすると、
点Cは線分AQおよび線分DPの上にある。

円と星形の定理（その２）

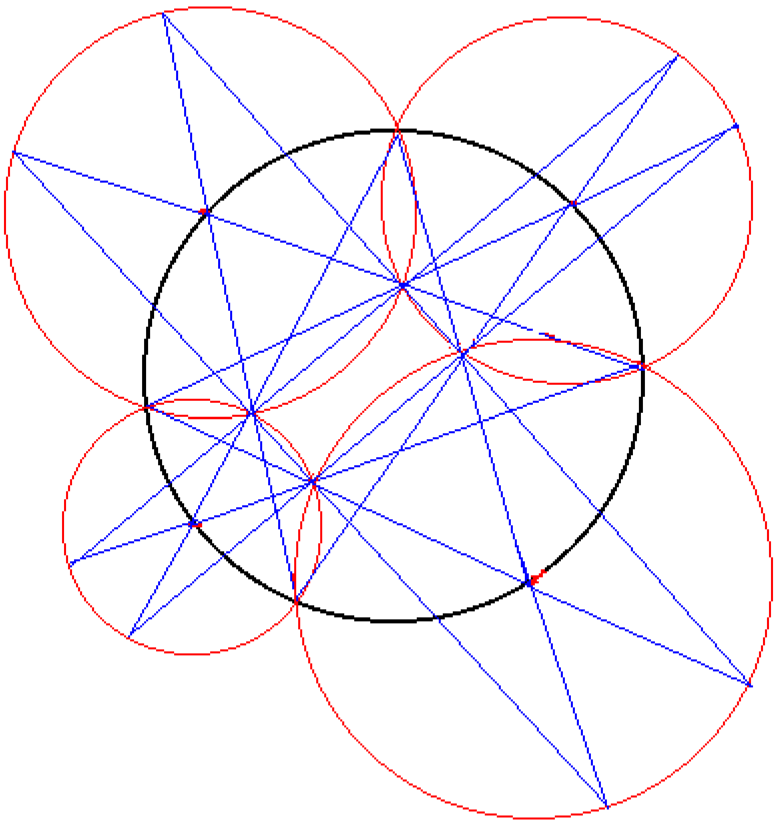
中川宏

証明は意外と簡単でした。

図のように二等辺三角形が４つ連なっていて、おなじ色の角度は等しいわけです。
他方、円に内接する四角形の向かい合う角度の和は180°という定理がありますから、
∠A＋∠B＝●＋●＋●
＝180°
したがって∠ACQ＝
●＋●＋●＝180°
∠DCPも同様です。



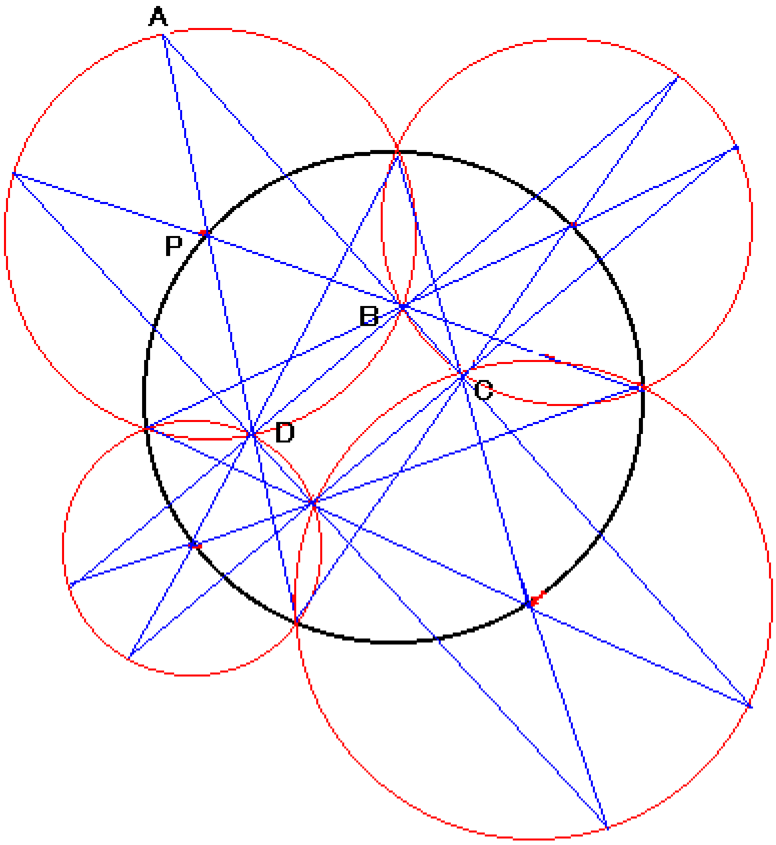
ところで、５つの円の定理は他の個数では成り立たないのですが、少し制約をゆるめれば、円が４つの場合は図のような星形をえがくことができるようです。中央に見える長方形はいぜん四弁花長方形の定理と呼んだものです。



円と星形の定理（その３）

中川宏

円が４つの場合の変則的な星形も簡単に証明できます。



線分DPを円Pの円周上まで延長した点Aが直線BC上にあることを示せばよいわけです。

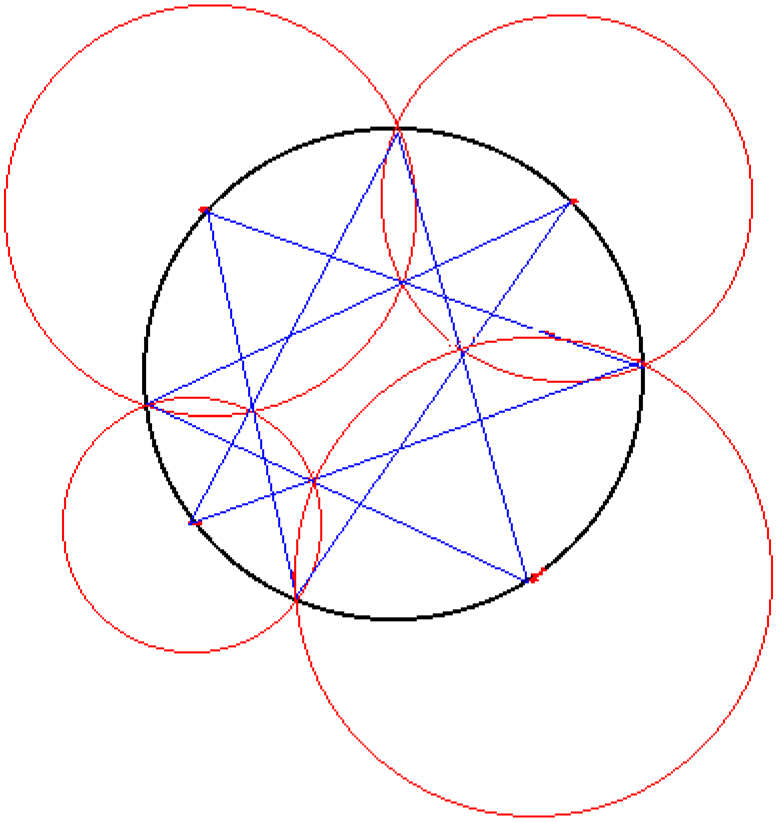
四弁花長方形の定理から、∠DBC＝90°

他方、∠ABDは円Pの直径ADの円周角なのでこれも90°

よってABCは一直線です。

円と星形の定理（その4）

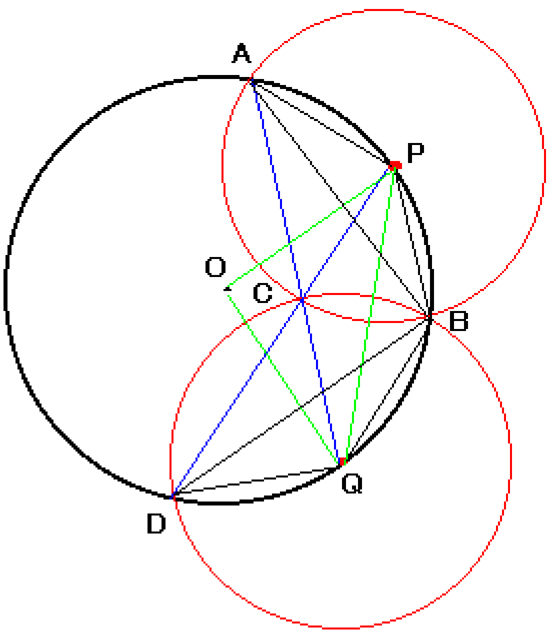
中川宏



同一円周上に中心を置く円を4つ以上並べて、隣り合う円の交点も同一円周上にあるようにしたとき、円周上にある円の中心→隣り合う円の内側の交点→外側の交点→内側の交点→円周上の円の中心と結んでいくと星形が描けます。

この定理について一松先生からいただいたお手紙を紹介します。

今回もまた美しい円の模様を楽しませていただきました。
今回の諸図形の基本は末尾に挙げられた補助定理と思います。
これはそれほど難しい結果ではないようです。（とは言うものの考え付くまでに多少の時間がかかりました。）私なりの証明を述べます。



まず、次の事実に注意します。
①、四角形PBQCは凧形（PB＝PC，QB＝QC）であり、対角線PQについて対称、したがって∠PCQ＝∠PBQである。
②、△PAC、△PAB，△QBD、
△QCDは二等辺三角形である（PA＝PC＝PB，QC＝QD＝QB）。
したがって∠ACQ＝∠ACP＋∠PCQ＝∠PAC＋∠PBQ＝∠BAC＋∠BAP＋∠PBQ。ここで∠BAP＝円Oの弧BP上の円周角、∠BAC＝1／2∠BPC（中心角と円周角）＝∠QPB（凧形の半分）＝円Oの弧BQ上の円周角です。
そして、∠PBQ＝180°－円Oの弧PQ上の円周角です。したがって
∠ACQ＝180° －円OのPQ上の円周角＋BP上の円周角＋BQ上の円周角
ですが、さいごの網掛けの部分はPQ＝QB＋BPであってちょうど打ち消しあい、
∠ACQ＝180°すなわちA、C，Qは一直線上にあります。■
P，C，Dも同様ですが、
∠DCQ＝∠CDQ＝∠CDB＋∠QDB＝1/2∠BQC＋∠QDB＝∠PQB＋∠QBD
＝円OのPB＋QB上の円周角＝円O上のPQ上の円周角＝∠ACP
とすればP，C，Dも一直線になります。■

円が多くて、どの円の上の円周角か注意しないと誤りやすいのですが、上記のように、対称性（二等辺三角形の性質）と円周角の関係だけで証明できます。
面白い発見と存じます。