

## アルキメデスのタイル貼りの定義について

中川宏

複数種類の正多角形を使ったタイル貼りのうち、すべての頂点形状が合同なものがアルキメデスのタイル貼りと呼ばれ8種類が数え上げられている。

[3,12,12]、[4,8,8]、[3,4,6,4]、[3,3,3,4,4]、[4,6,12]、[3,6,3,6]、[3,3,3,3,6]、[3,3,4,3,4]

このような表記の意味について一松信著「正多面体を解く」81p以降では、

まず、一つの頂点の周りの各正多角形の辺数をその順に並べて、たとえば[4,6,12]というように表す。

これを巡回的に変換しても、逆順に並べ替えても同一である、

と定義されている。

巡回的に変換するとは、たとえば[4,6,12]であれば、

[6,12,4],[12,4,6]ということである。

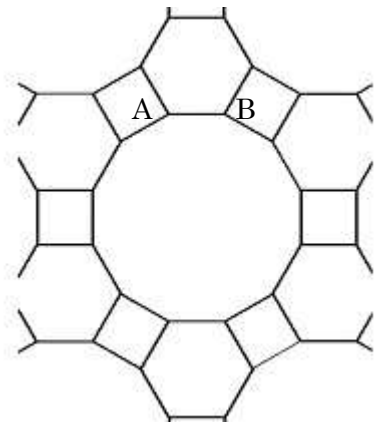
右の図の頂点Aにおいて辺を接する正多角形を時計回りに数え上げる場合がこれにあたる。これは一定方向に数え上げる出発点が変わるというだけのことなので理解しやすい。

ところが、頂点Bにおいて時計回りに数え上げると、

[12,6,4],[4,12,6],[6,4,12]となる。

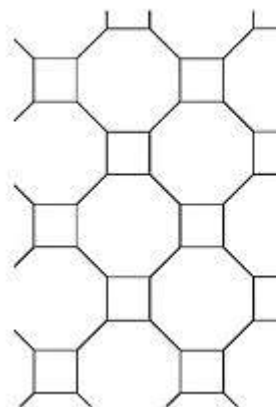
これらはさきほど頂点Aにおいて時計回りに数え上げたもののちょうど「逆順」にあたる。

8種類あるアルキメデスのタイル貼りのなかで逆順が問題となるのはこの[4,6,12]だけなので、定義の例として取り上げられているのだと思われる。表記上の逆順というのは図形的には鏡像を意味していることがわかる。

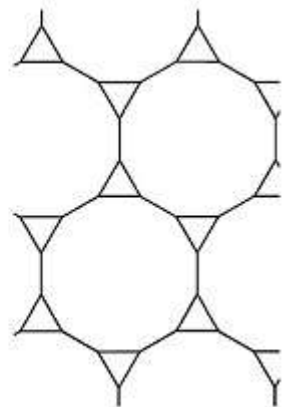


[4,6,12]

右の図のように、表記の要素が3つで、2種類の正多角形しかない場合は、図形的には鏡像の位置にある頂点であっても、同一の表記になるので、結果的に問題とならないわけである。



[4,8,8]



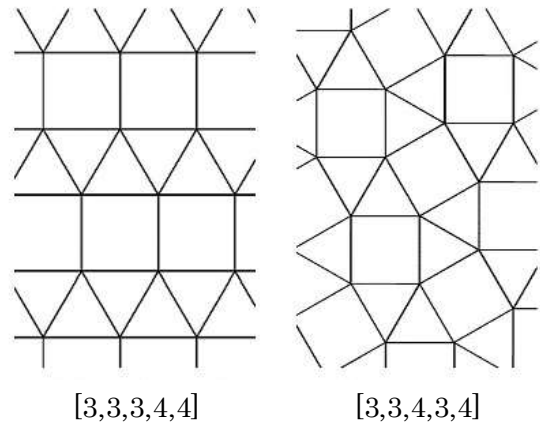
[3,12,12]

さて、2種類の正多角形しかなくても、要素が4つ、5つの場合には、たとえば、

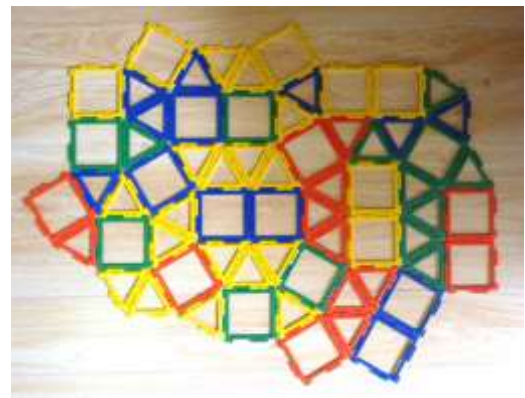
[3,3,3,4,4]と[3,3,4,3,4]

とは、並び順が違うものとして、それぞれ異なる頂点形状として区別される。

正三角形と正方形の2種類からなり、要素が5つの頂点形状がこの2種類しかないことは、たとえば、 $[3,4,3,3,4]$ とか $[4,3,3,3,4]$ とかでも4と4が離れているタイプは、いずれでも巡回的変換や逆順変換すれば $[3,3,4,3,4]$ と同一であることから理解することができる。



意外なことに、 $[3,4,3,3,4]$ と $[4,3,3,3,4]$ とは組み合わせることも可能である。たとえば、

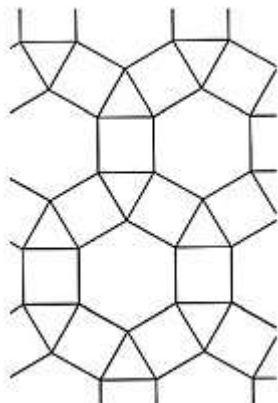


そこでアルキメデスのタイル貼りの定義をわずかに緩めることを考えてみる。頂点形状の要素を順序に関係のない組み合わせにとらえ、上の写真のようなタイル貼りを

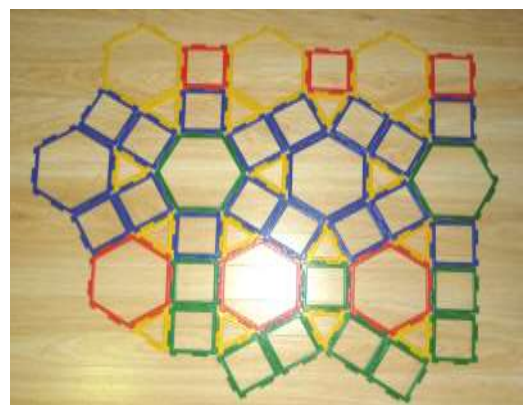
$$\{3^3, 4^2\}$$

と表記することにする。

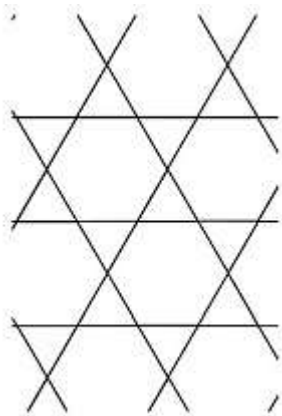
同様のものは、 $[3,4,6,4]$ と $[3,4,4,6]$ との組み合わせや、 $[3,6,3,6]$ と $[3,3,6,6]$ との組み合わせでも可能である。



$[3,4,6,4]$



$\{3,4^2,6\}$



[3,6,3,6]



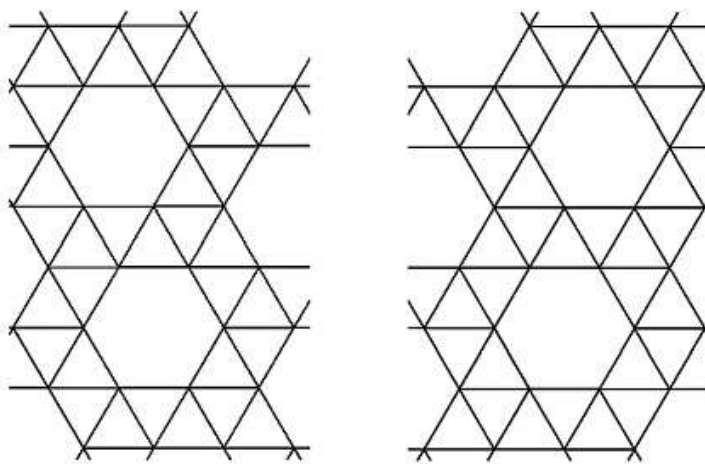
{3<sup>2</sup>,6<sup>2</sup>}

ところで、[3,3,3,3,6]には以下のような鏡像が存在するので2種類あるとする説もある。

しかし、この両者の違いは、

[3,4,3,3,4]と[4,3,3,3,4]との違いとは質を異にするものであって、頂点形状ではなく、大域的な違いである。

頂点形状の合同判定にすでに鏡像が含まれていたことからすると、この両者の違いも鏡像として同一とみなす方が首尾一貫しているように思う。



[3,3,3,3,6]