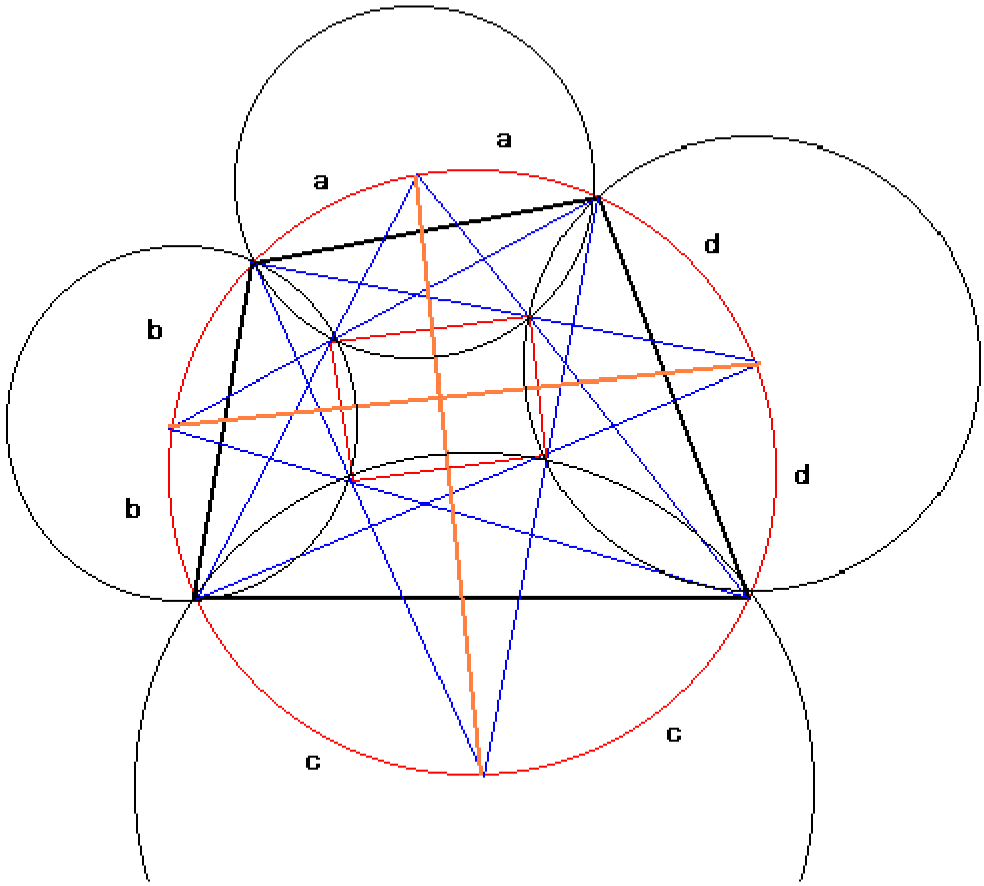
四角形の4円定理

中川宏

（その1）

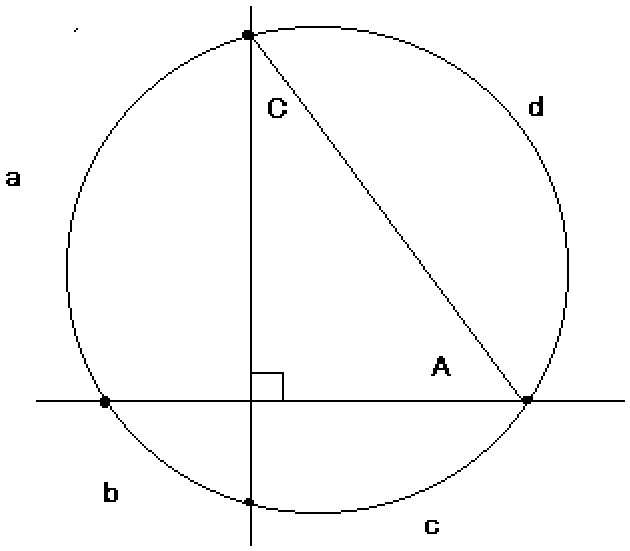
円に内接する四角形の外接円の円周上から2頂点を通る円を描くと、4つの円の内側の4交点は長方形を描く。



上の図において、同じ長さの円弧にたいする円周角の大きさは等しいことから、中央の赤い四辺形の外側に立つ4つの三角形は二等辺三角形であり、頂角から底辺に伸びる赤い線は頂角の二等分線であることがわかる。したがって赤い四辺形の向かい合う辺どうしは交差する二等分線に直交し互いに平行である。

さて、二本の赤い線が直交しているかどうかだが、一つの円の二本の弦が直交するのは、

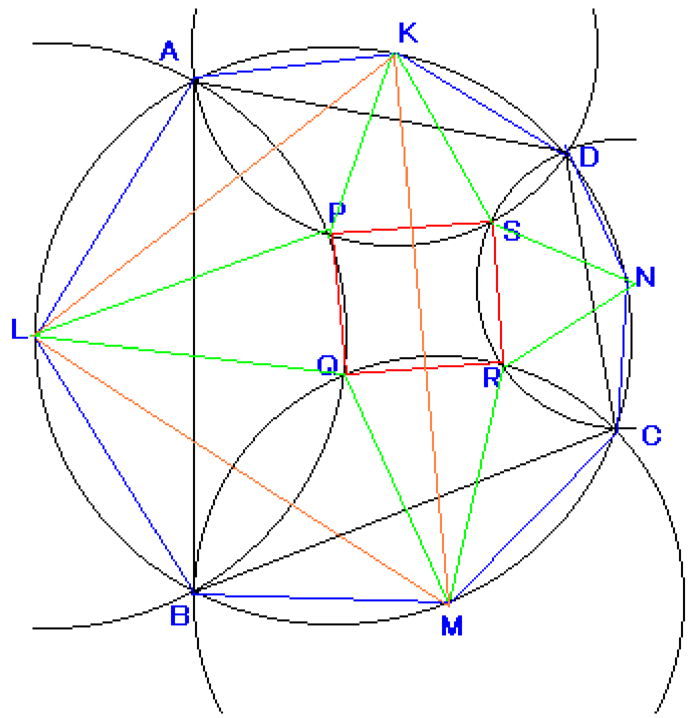
次のとき。



∠A＋∠C＝90°
このとき円弧 a+c=b+d＝円周／2
そこで、元の図をみると、
a+b+c+d= a+b+c+d
となっているから、たしかに二本の弦は直交していて、赤い四辺形は長方形であることがわかる。

一松先生による証明

円に内接する四角形ABCDの円弧AB、BC、CD、DAの中点をL，M，N，Kとし、それらを中心としてそれぞれの弧の両端を通る円を描く。隣りどうしの円の交点をP，Q，R，Sとすると、四角形PQRSは長方形である。



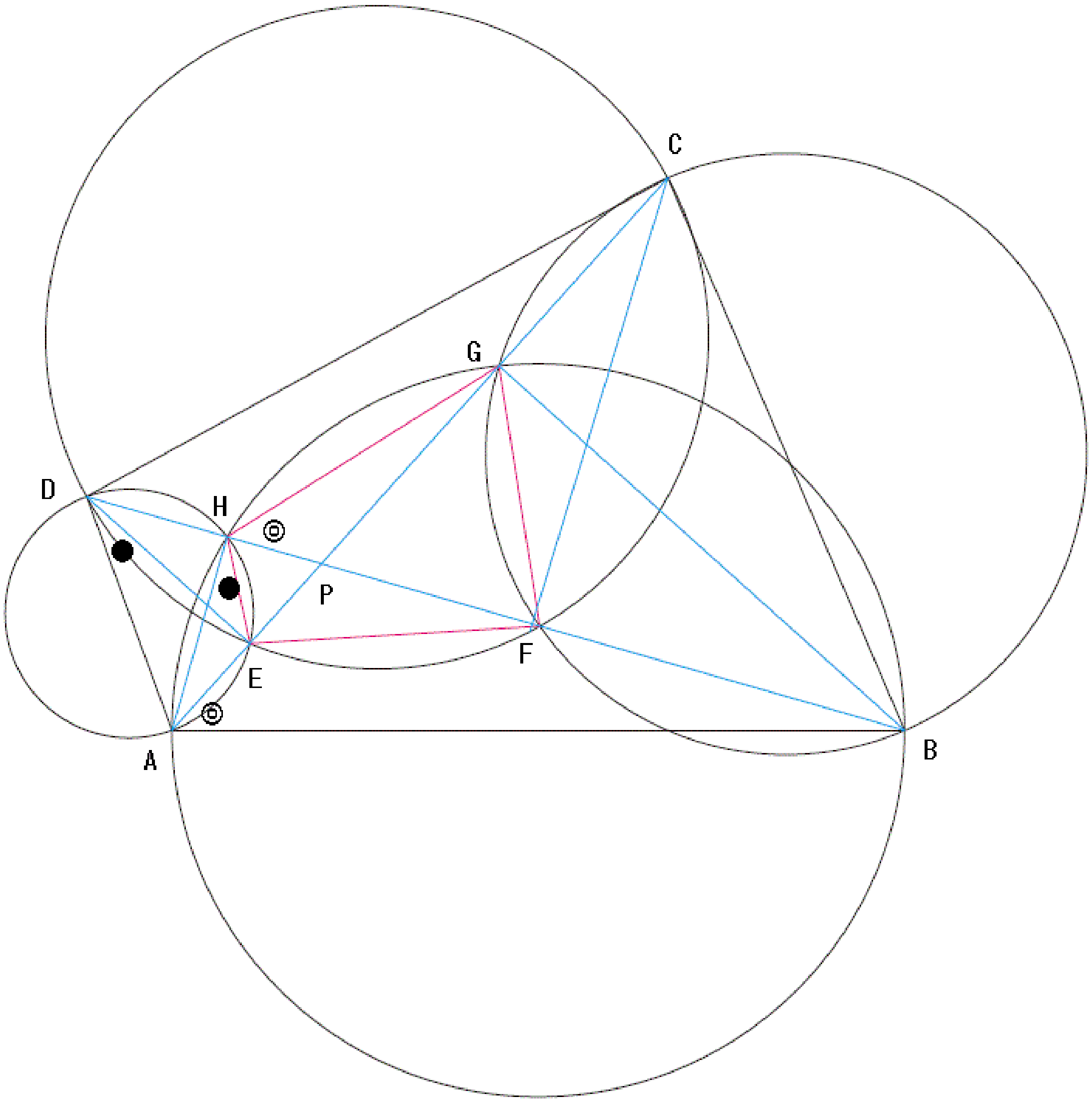
証明　一例として点Qのまわりの角を考える。

∠LQP＋∠LQM＋∠MQR＝270°・・・（1）
を示せば、残りの角∠PQR＝90°であり、他の頂点も同様である。

△LBMと△LQMとは、その作図により
LB＝LQ、MB＝MQ、LMは共通だから合同である。
したがって∠LQM＝∠LBM＝180°－弧LM上の円周角 （以後、弧LM上の円周角（劣弧上の小さいほうの角）を∠LMと略記する。）
＝180°－1／2（∠AB＋∠BC）・・・（2）
他方、
∠ALB＝180°－∠AB、∠BLQ＝2∠BLM、2∠BM＝∠BC
同様に
∠ALP＝2∠ALK、2∠AK＝∠AD
これから
∠PLQ＝∠ALB－（∠ALP＋∠BLQ）＝180°－∠AB－∠BC－∠AD
＝∠CD　（∠AB＋∠BC＋∠CD＋∠DA＝1／2（中心角の和）
＝1／2×360°＝180°である。）
したがって
∠LQP＝90°－1／2∠PLQ＝90°－1／2∠CD・・・（3） 同様に、
∠MQR＝90°－1／2∠AD・・・（4）
である。したがって（1）の左辺は
∠LQP＋∠LQM＋∠MQR
＝90°－1／2∠CD＋90°－1／2∠AD＋180°－1／2（∠AB＋∠BC）
＝360°－1／2（∠AB＋∠BC＋∠CD＋∠AD）
＝360°－1／2×180°＝270°
となって（1）が証明できた。すなわち∠PQR＝360°－270°＝90°である。
他の内角も同様である。 ■

付記
これらの角の計算から
∠PLQ＋∠QMR＋∠RNS＋∠SKP＝180°
といった関係もでる。
四角形ABCDの形によっては、ずいぶんつぶれた長方形PQRSもできる。

（その2）
対角線が直交しない任意の四角形の各辺の中点を中心とし、その辺の両端を通る4つの円を描くと、4つの円の10交点のうち内側の4交点を結んでできる四角形は、元の四角形と相似（鏡像）である。また、その鏡像四角形の対角線は元の四角形の対角線の一部である。



証明
図のように補助線を引き、円周角の定理より等しい組の角に記号を付ける。

四角形ABCDの各辺は4つの円のそれぞれ直径であるから、その円周角にあたる、∠AGBと∠BGCはいずれも直角。また、∠CEDと∠DEAもそれぞれ直角である。同様に、∠AHD=∠AHB=直角、また、∠CFD＝∠BFC=直角であるから、四角形ABCDの対角線のうえに四角形EFGHの対角線は載っていることになる。

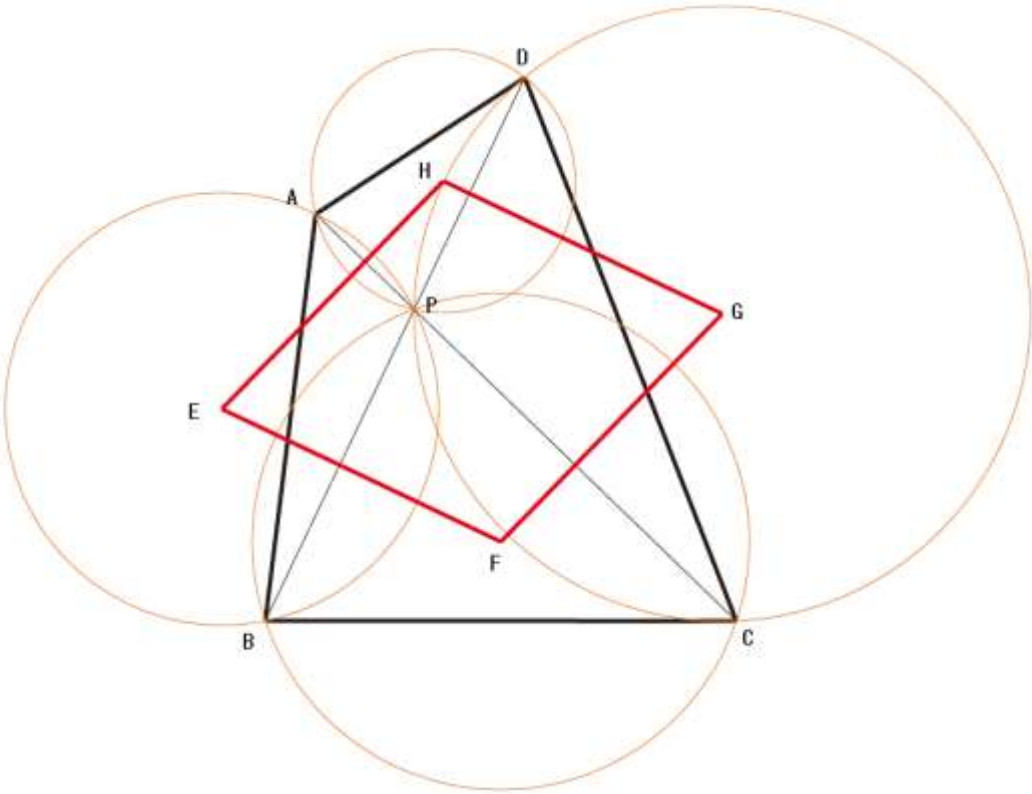
つぎに、四角形ABCDの内角と四角形EFGHの内角を比較する。
たとえば、∠GHE＝◎＋∠FHE＝◎＋（直角－●）
∠DAB＝◎＋∠EAD＝◎＋（直角－●）

よって、EFGH四角形の内角GHEと四角形ABCDの内角DABとは等しい。

同様にして、∠HEF＝∠CDA
∠EFG＝∠BCD
∠FGH＝∠ABC
つまり四角形ABCDと四角形EFGHの内角はそれぞれ等しい。
また、はじめに見たようにそれぞれの対角線のなす角も等しいのであるから、両者は相似（鏡像）の関係にある。

そこで、両者の対応する対角線部分を比べてみる。
直角三角形PFCにおいて、∠P（対角線の交差角）＝θとおくと、
PF＝CP・$\cos\theta$
よって四角形ABCDと四角形EFGHの相似比は$1:\cos\theta$（θ は対角線の交差角）である。
いいかえると、両者の相似比は、辺長や対角線の長さ、内角には無関係であり、対角線の交差角によってのみ決まるのである。

（その3）
任意の四角形の隣り合う2頂点と対角線の交点を結ぶ三角形の外接円４つのそれぞれの中心は、平行四辺形を描く。



上の図に置いて、円の中心点Eは線分APの垂直二等分線上にある。また、円の中心点Hも線分APの垂直二等分線上にある。よって、HE⊥AP
同様に、FG⊥PC
ところでAPとPCは対角線ACの一部であるから、HE∥FG
同様にして、EF∥GHである。
よって、四角形EFGHは平行四辺形である。