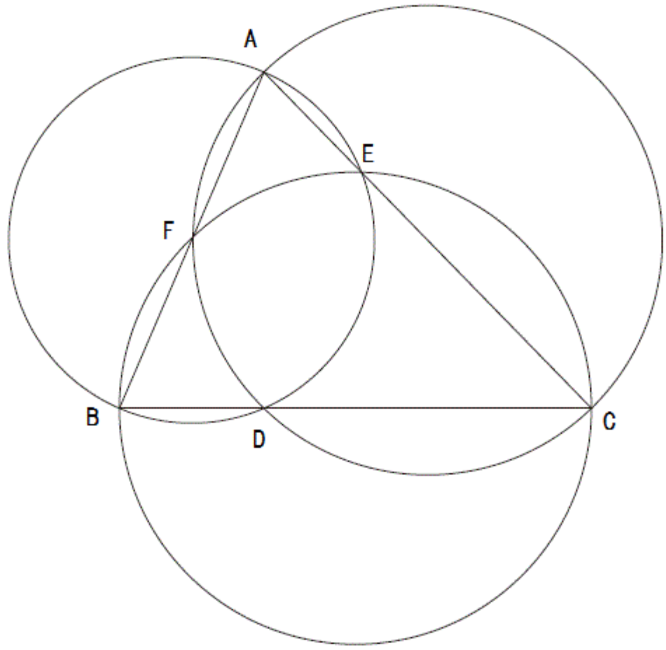
三角形の相似

中川宏

定理

鋭角三角形 ABC において、各辺の中点を中心としてその辺の両端を通る円３つの交点のうち、三角形の頂点でない３点を D,E,F とすると、それらはいずれも三角形ＡＢＣの辺上にある、また三角形ＡＦＥ、三角形ＢＤＦ、三角形ＣＥＤはいずれも三角形ＡＢＣと相似（鏡像）である。

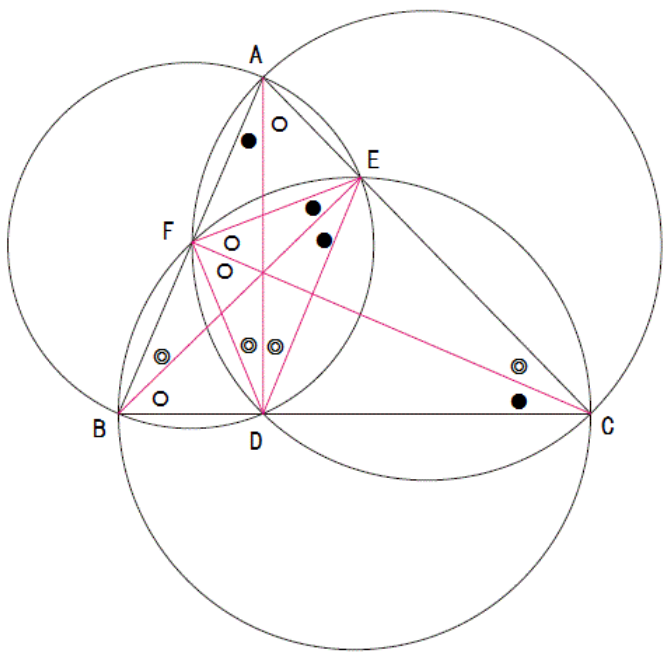


証明

図のように補助線を引き、角に記号を付ける。

たとえば、∠ＡＤＣは円の直径ＡＣに対する円周角、∠ＡＤＢは円の直径ＡＢに対する円周角であるから、いずれも直角である。もしも点Ｄが線分ＢＣ上にないと仮定すると２点Ｂ，Ｃを通る直線が２本存在することになる。それはユークリッド幾何の前提に反するから、点Ｄは辺ＢＣ上にある。

点Ｅが線分ＡＣ上にあること、点Ｆが線分ＡＢ上にあることも同様に示すことができる。



また、同一の円弧にたいする円周角は等しいことから、上図の○、●、◎はそれぞれ等しい。
∠ＡＦＥ＝２π－（○＋●＋∠ＦＥＡ）
∠ＦＥＡ＝２π－（○＋●＋●＋◎）
から、∠ＡＦＥ＝●＋◎
また、∠ＢＣＡ＝●＋◎だから、
∠ＡＦＥ＝∠ＢＣＡ
したがって、∠ＦＥＡ＝∠ＡＢＣ
よって、三角形ＡＢＣと三角形ＡＥＦは相似（鏡像）である。
同様に、三角形ＢＦＤと三角形ＣＤＥもまた三角形ＡＢＣと相似（鏡像）である。

上に見たことから、点Ｄは点Ａから辺ＢＣに降ろした垂線の足、点Ｅは点Ｂから辺ＣＡに降ろした垂線の足、点Ｆは点Ｃから辺ＡＢに降ろした垂線の足でもある。よってＡＤ，ＢＥ，ＣＦの交点は三角形ＡＢＣの垂心であり、三角形ＤＥＦは垂心三角形とも呼ばれる。
この垂心三角形の周長は、

$$DE+EF+FD=\frac{8S^2}{AB\times BC\times CA}$$　（Ｓは三角形ＡＢＣの面積）

であることが知られている。(「なぜ初等幾何は美しいか」Yvonne & René Sortais 東京出版)

ここで三角形の面積に関するヘロンの公式を適用してみる。

$$S=\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}$$

を使ってＳを消去すると、

$$\frac{DE+EF+FD}{a+b+c}=\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{2abc}$$

この値は元の三角形の周長にたいする垂心三角形の周長の比であるが、元の三角形の３辺の長さだけで表せることがおもしろい。また、このことから任意の三角形に内接する周の長さが最小の三角形は垂心三角形であることが導けるのだという。

また、佐藤郁郎先生に計算していただいたところ、
元の三角形の面積にたいする垂心三角形の面積の比は、

$$\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)}{4a^2\,b^2c^2}$$

となることがわかった。