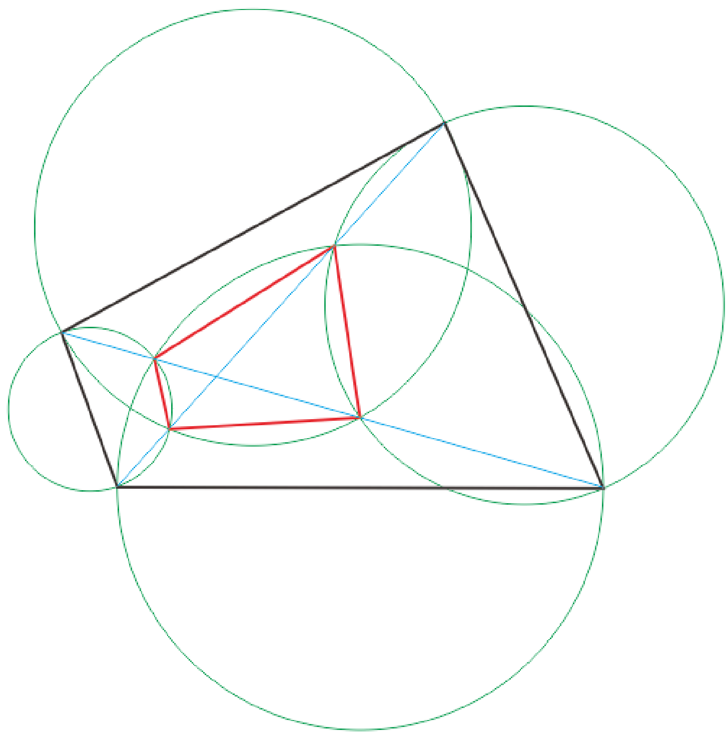
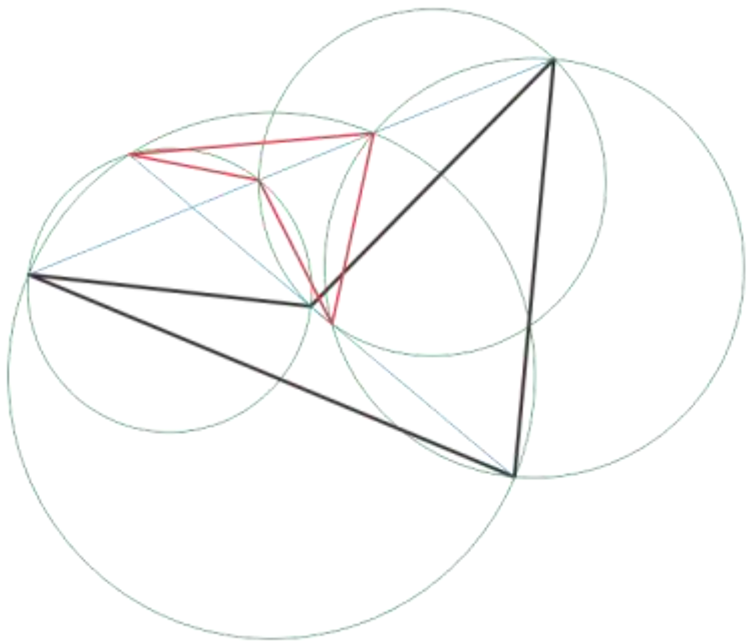
四角形の相似

山﨑憲久

定理　任意の四角形の各辺を直径とする４つの円を描く。隣り合う辺上の円の２交点のうち、四角形の頂点ではない交点４つを、四角形の隣り合う辺を辿る順に結んでできる四角形は、元の四角形と相似（鏡像）である。
また、その鏡像四角形の対角線は元の四角形の対角線と同一直線状にあり、それぞれの交点は一致する。

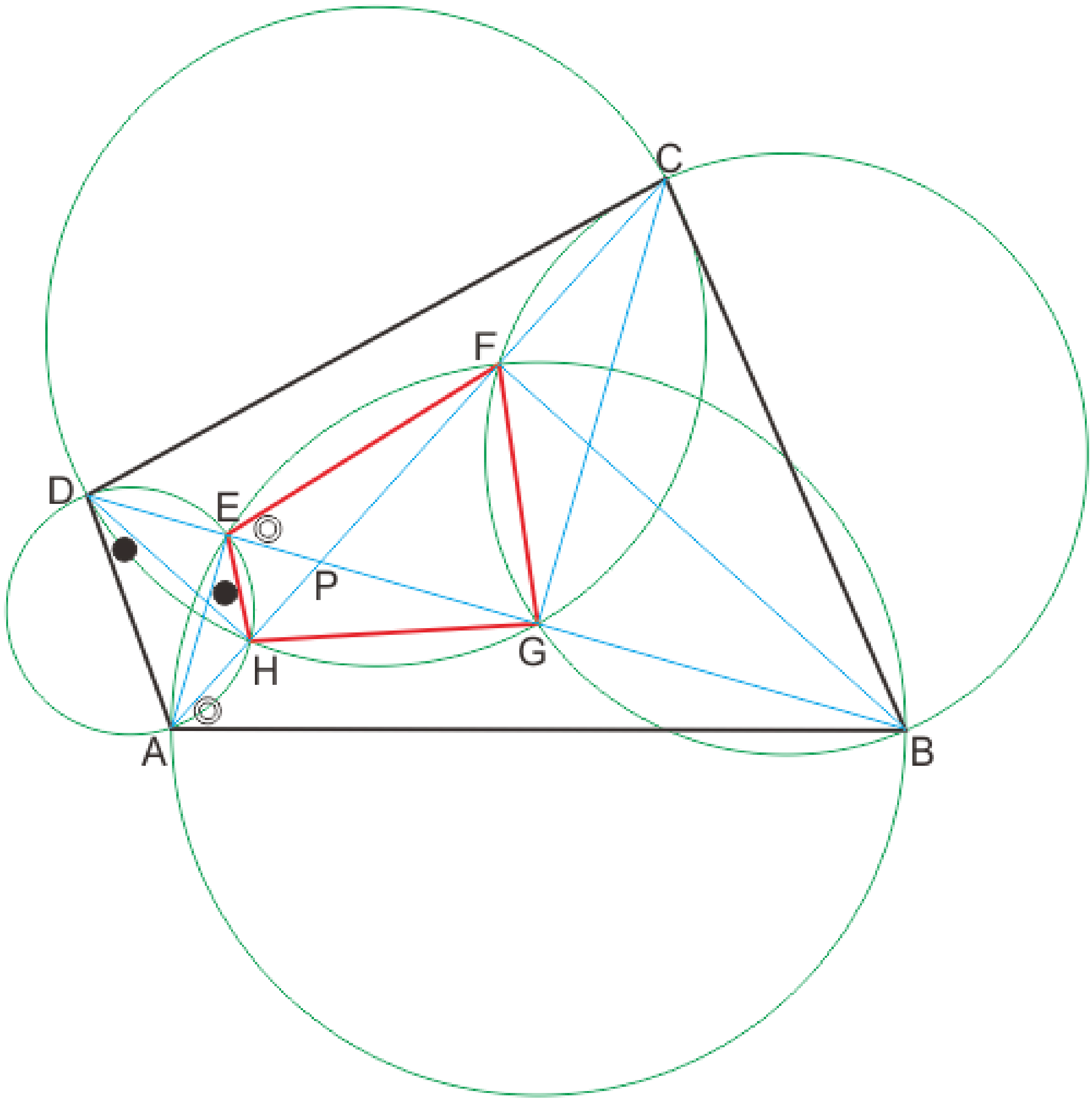




証明

四角形は凸でも凹でもよいが、凸の場合で証明する。

図のように補助線を引き、円周角の定理より等しい組の角に記号を付ける。



四角形ＡＢＣＤの各辺は４つの円のそれぞれ直径であるから、その円周角にあたる、∠ＡＦＢと∠ＢＦＣはいずれも直角。また、∠ＣＨＤと∠ＤＨＡもそれぞれ直角である。同様に、∠ＡＥＤ=∠ＡＥＢ=直角、また、∠ＣＧＤ＝∠ＢＧＣ=直角であるから、四角形ＡＢＣＤの対角線のうえに四角形ＥＦＧＨの対角線は載っていることになり、対角線の交点Ｐは一致する。

つぎに、四角形ＡＢＣＤの内角と四角形ＥＦＧＨの内角を比較する。

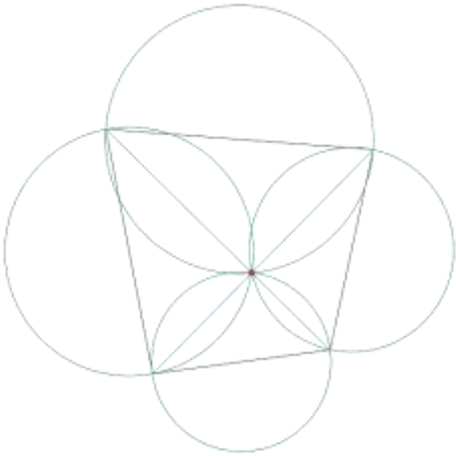
たとえば、∠ＦＥＨ＝◎＋∠ＧＥＨ＝◎＋（直角－●）

∠ＢＡＤ＝◎＋∠ＨＡＤ＝◎＋（直角－●）

よって、四角形ＥＦＧＨの内角ＦＥＨと四角形ＡＢＣＤの内角ＢＡＤとは等しい。

同様にして、∠ＧＨＥ＝∠ＣＤＡ
∠ＦＧＨ＝∠ＢＣＤ
∠ＥＦＧ＝∠ＡＢＣ
つまり四角形ＡＢＣＤと四角形ＥＦＧＨの内角はそれぞれ等しい。
また、はじめに見たようにそれぞれの対角線のなす角も等しいのであるから、両者は相似（鏡像）の関係にある。

そこで、両者の対応する対角線部分を比べてみる。
直角三角形ＰＧＣにおいて、∠Ｐ（対角線の交差角）＝θ（$0° < \theta \leqq 90°$　＊）とおくと、
ＰＧ＝ＰＣ・$\cos\theta$
よって四角形ＡＢＣＤと四角形ＥＦＧＨの相似比は１：$\cos\theta$（θは対角線の交差角）である。
いいかえると、両者の相似比は、対角線の交差角によってのみ決まるのである。
　　＊　$\theta = 90°$ の場合は、$\cos\theta = 0$ となるが、実際、四角形ＥＦＧＨは１つの点となってしまう。



2021 年 12 月 11 日加筆更新

文書一覧に戻る　http://woodenpolyhedra.web.fc2.com/text.html