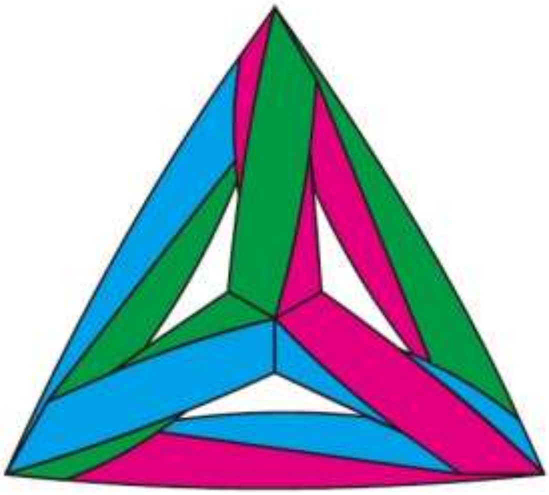
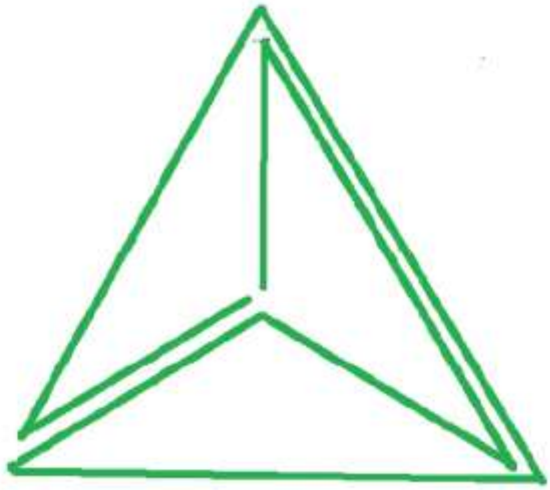
メビウス角柱多面体について（１）

中川宏

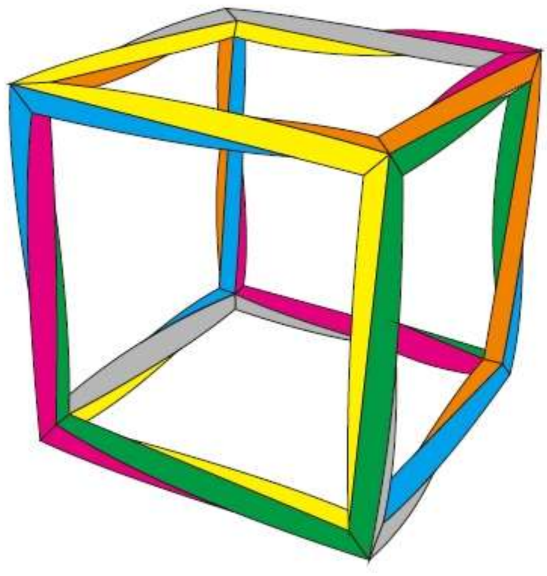
ペンローズの三角形とメビウスの帯との関係について調べてみると、メビウスの帯に厚みを持たせて環状にしたものが一部でメビウス・プリズムと呼ばれていることが分かった。しかしこのメビウス・プリズムでフレーム多面体を作ったものは見当たらないので、さしあたりメビウス角柱多面体と呼ぶことにする。

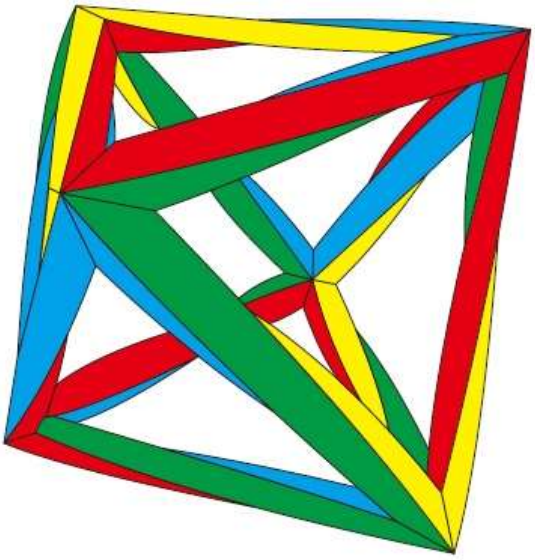


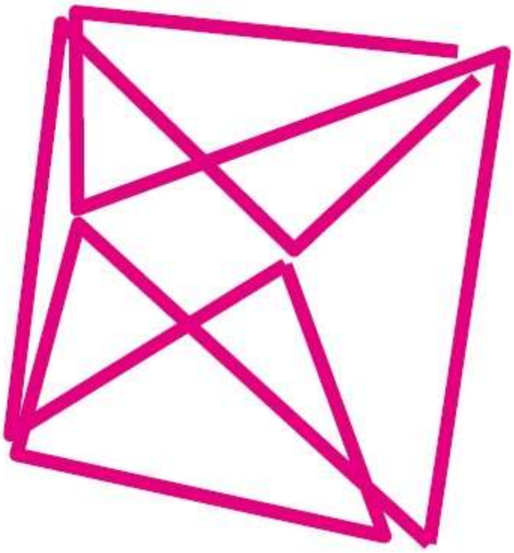


そうすると前回作ったのは、メビウス角柱正四面体ということになるが、これが３本のメビウス面を表面に持つことに私は驚いた。図の右側はたとえば緑色の表面をもつ１本のメビウスの帯を一筆書きで示したものである。もし４本であったなら驚かなかったのだが、なぜ３本なのか？途方に暮れた。そこでこの事実をどのように説明できるのかを探るために、残りの正多面体を作って考えてみることにした。

手始めに同じく１２本の稜をもつ立方体（正６面体）と正８面体を作って調べたものを図解で示す。







結果は、立方体のメビウス面は６面、正８面体のメビウス面は４面であった。ここまで作ってもまだ、何がメビウス面数を決めるのか、皆目見当がつかない。

ひとまずこれまで作った３つのメビウス角柱正多面体の諸量を列挙しておくことにする。

メビウス角柱多面体	柱	面	頂点	稜	穴	メビウス面	面数／メビウス面数
正４面体	6	２４	２０	４８	3	3	8
正６面体	１２	４８	４０	９６	5	6	8
正８面体	１２	４８	３６	９６	7	4	１２

メビウス角柱多面体について（２）

中川宏

正４面体、正６面体、正８面体を調べてきたので、次は正１２面体、正２０面体が課題であるが、これらは柱の数が３０本になるので、紙模型では形が保てないことが予想される。そこでストロー４本を束ねて捩じってセロテープで固定する方法を試してみようと思う。

ただその前に、これまでの紙模型をいかして、正多面体ではないが、正８面体の半分の四角錐と正４面体２個分の三角６面体（重三角錐）を検討してみた。この２立体は、最上流和算家の会田安明著「算法截籠集」にも截籠すなわち立方八面体など切頂多面体ではないが収録されていたので念頭にあったものである。

すると以下のような結果であった。

メビウス角柱多面体	柱	面	頂点	稜	穴	メビウス面	面数／メビウス面数
正四角錐	8	３２	２５	６４	4	4	8
正三角６面体	9	３６	２８	７２	7	3	１２

これまで検討してきた正多面体３種の結果を合わせてみる。

メビウス角柱多面体	柱	面	頂点	稜	穴	メビウス面	面数／メビウス面数
正４面体	6	２４	２０	４８	3	3	8
正６面体	１２	４８	４０	９６	5	6	8
正８面体	１２	４８	３６	９６	7	4	１２

ここまできてようやくおぼろげながら一つの光が見えてきた。
正多面体でないプリミティブな立体も加えて比較することによって、元の多面体の頂点価数には関係なく、元の多面体つまりメビウス角柱で置き換える以前のシンプルな多面体がもつ最大の回転対称性に関係しているように見えてきた。ただし正６面体の最大回転対称回数は立体としては３であるので、その２倍にあたるので保留しなければならない。
また、面数／メビウス面数は８または１２という値しかとらないのかどうかも気になるところである。

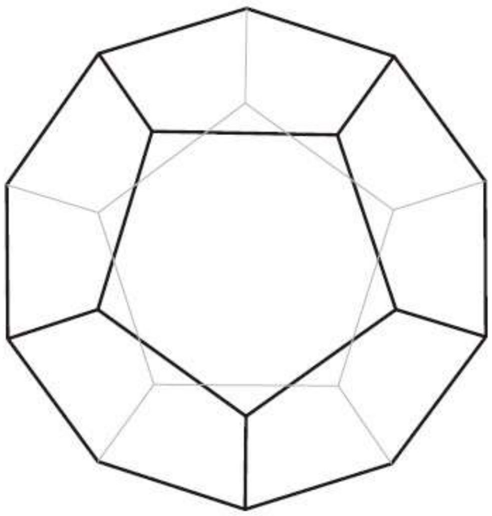
そこでこんどは、回転対称性の低い稜数の少ない立体として、ジョンソン立体の４９番（正三角柱と正四角錐を貼り合わせた形）を検討してみた。
すると驚いたことにメビウスの帯の数は４本であったが、その長さは、８面、１２面、１２面、２０面というようにばらばらであった。４の倍数であることには違いはないが、２０面をめぐるメビウスの帯は初めてであったし、３種類のメビウス面の混合という新たな想定外の結果となった。

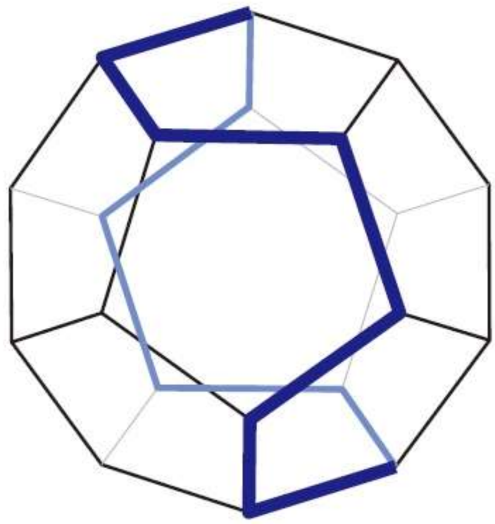
メビウス角柱多面体	柱	面	頂点	稜	メビウス面	メビウス面を構成する面（節）
ジョンソン４９番	１３	５２	４０	１０４	4	８，１２，１２，２０

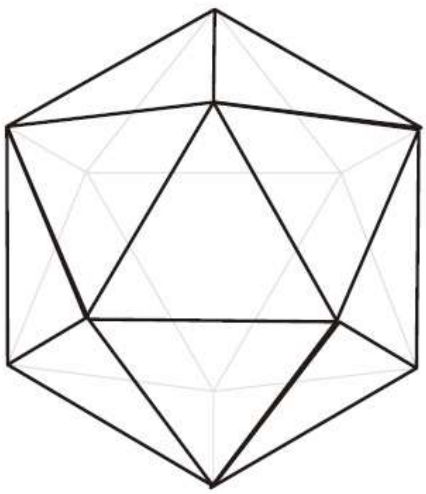
メビウス角柱多面体について（３）

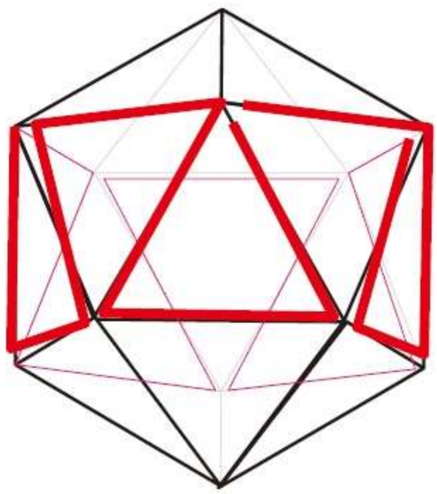
中川宏

正１２面体と正２０面体の稜を９０度ねじった角柱で置き換えたものについて調べた結果は次のようであった。









メビウス角柱正１２面体は、１２本の柱を巡るメビウスの帯が１０本であり、メビウス角柱２０面体は、２０本の柱を巡るメビウスの帯が６本であった。

正多面体５種類を一覧にすると以下のようになる。

メビウス角柱多面体	柱	面	頂点に集まる柱	最大の回転対称	点心投影対称	面心投影対称	メビウス面	面数／メビウス面数
正４面体	6	２４	3	3	3	3	3	8
正６面体	１２	４８	3	4	6	4	6	8
正８面体	１２	４８	4	4	4	6	4	１２
正１２面体	３０	１２０	3	5	6	１０	１０	１２
正２０面体	３０	１２０	5	5	１０	6	6	２０

正多面体５種と他３種の多面体を調べてみて共通して言えそうなことは、

１、　メビウス角柱多面体は、複数のメビウスの帯を隙間なくかつ重なりなく貼り合わせたものと見ることができる。

２、　その時のメビウスの帯が巡る角柱の本数は、８，１２，２０、・・・など４の倍数である。

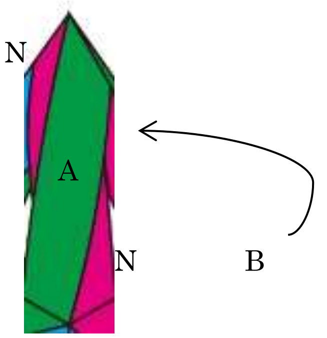
３、　正多面体の場合のメビウスの帯の本数は、点心投影図の対称回数あるいは面心投影図の対称回数に一致しているが、どちらに一致するかを説明することはできない。

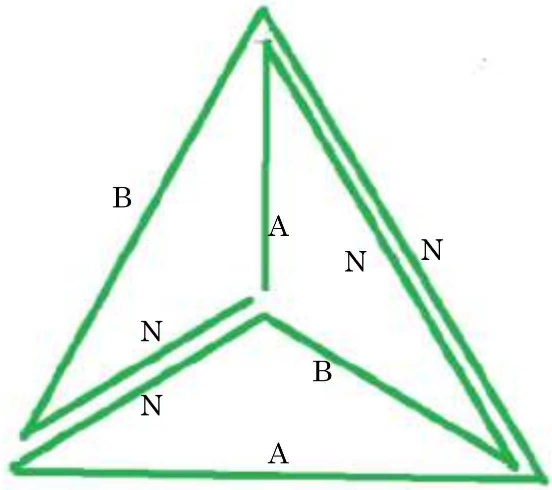
メビウス角柱多面体について（４）

中川宏

これまでの調査では、メビウス角柱多面体のメビウス面数を決める因子を突き止めることはできなかった。そこで個々のメビウスの帯の進み方を逐一追ってみることにした。

メビウス角柱でフレーム多面体を作った場合、外側を向いている面 A と内側を向いている面 B とそれ以外の２面 N を区別することができる。

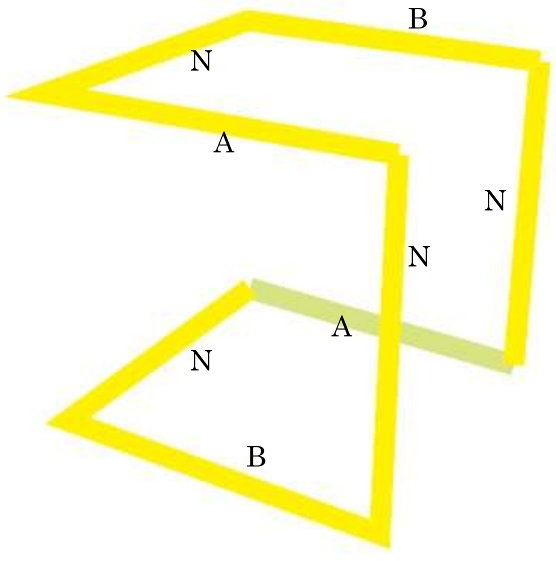


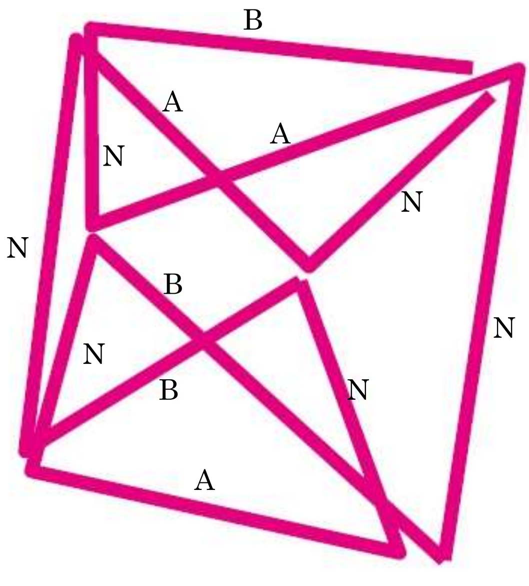


メビウス角柱四面体上の１本のメビウスの帯を追ってみると、

ANBNANBN

同様に、





正６面体では、ANBNANBN

正８面体では、ANBNANBNANBN

というように規則的に繰り返している。

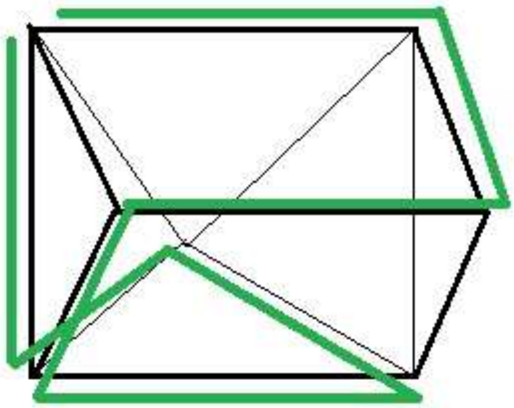
いずれの場合も、正多面体の一つの面の３辺を通ったら隣の面に移り、次の面でも３辺を通ったら隣の

面に移る。どちらの面に移るのかというと、この場合反時計回りにねじってあるのだが、B 面の後に進行方向左側に、A 面のあとに進行方向右側の面に移る。

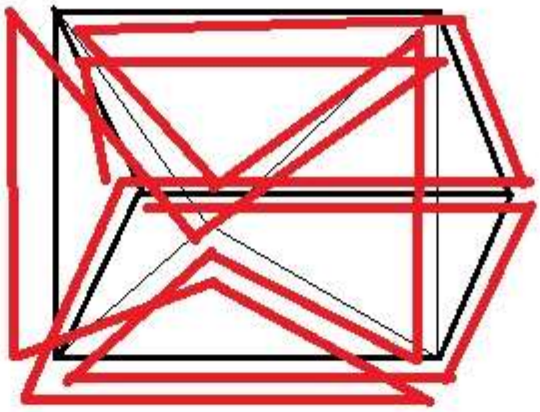
そして、４の倍数番目に出発点にもどるとそこでメビウスの帯を閉じる。

このようなルールになっているようである。このことは正１２面体や正２０面体でも確認できる。また、３種類の長さのメビウスの帯をもつジョンソン立体の４９番でも、以下のように確かめることができた。

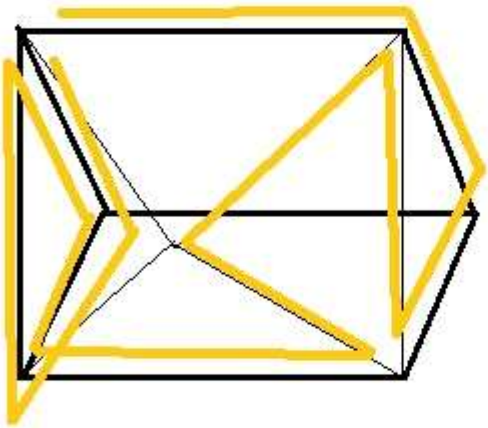
8



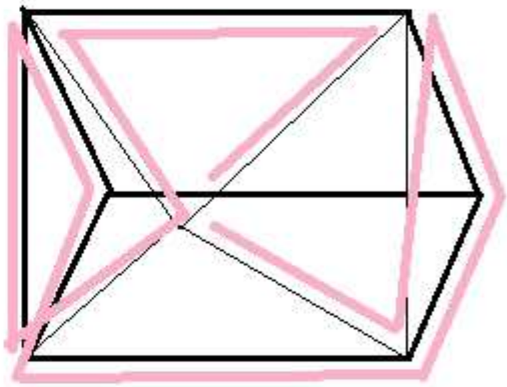
20



12



12



こうして、多面体の稜や頂点や面の数からいきなりメビウス面数を導き出すことはできないが、多面体の立体模型さえあれば、稜をねじったメビウス角柱多面体の模型を作らなくても、メビウスの帯の形状と本数を調べ上げることができるようになった。

メビウス角柱多面体について（５）

中川宏

いちいち捩じったフレーム模型を作る必要がなくなったので、半正多面体や平行多面体、デルタ多面体についても、メビウス角柱多面体のメビウス面を調べたので、一覧にする。

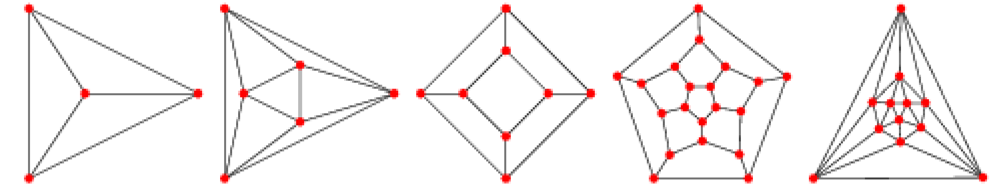
１本のメビウスの帯に含まれる柱面の数を節と呼ぶことにする。

メビウス角柱多面体	柱	面	頂点に集まる柱	最大の回転対称	メビウス面の節数	メビウス面の本数
正４面体	6	２４	3	3	8	3
正６面体	１２	４８	3	4	8	6
正８面体	１２	４８	4	4	１２	4
正１２面体	３０	１２０	3	5	１２	１０
正２０面体	３０	１２０	5	5	２０	6
切頂４面体	１８	７２	3	3	8	9
切頂６面体	３６	１４４	3	4	8 １２	１２ 4
切頂８面体	３６	１４４	3	4	１２	１２
切頂１２面体	９０	３６０	3	5	8 ２０	３０ 6
切頂２０面体	９０	３６０	3	5	２０	１８
立方８面体	２４	９６	4	4	１２	8
小菱形立方８面体	４８	１９２	4	4	１６	１２
大菱形立方８面体	７２	２８８	3	4	１６	１８
ねじれ立方体	６０	２４０	5	4	６０	4
２０・１２面体	６０	２４０	4	5	１２	２０
小菱形 20・12 面体	１２０	４８０	4	5	２０	２４
大菱形 20・12 面体	１８０	７２０	3	5	２０	３６
ねじれ 12 面体	１５０	６００	5	5	１００	6
菱形１２面体	２４	９６	３，４	4	１２	8
長菱形１２面体	２８	１１２	３，４	4	２８	4
六角柱	１８	７２	3	6	8 １２	6 2
デルタ６面体	9	３６	３，４	3	１２	3
デルタ１０面体	１５	６０	４，５	5	１２	5
デルタ１２面体	１８	７２	４，５	2	１６ ４０	2 1
デルタ１４面体	２０	８０	４，５	3	１６	5
デルタ１６面体	２４	９６	４，５	4	１６ ４０	1 2

メビウス角柱多面体について（６）

中川宏

多面体の立体模型がなくても、その平面グラフがあれば、メビウス角柱多面体のメビウス面を調べ上げることができる。下は正多面体５種の平面グラフである。



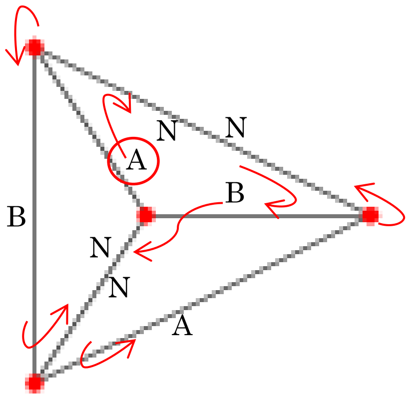
メビウス面を巡るルールを再確認しておくと、反時計回りに９０°捩じった角柱を多面体に組んだ時に、外側に向いている面をＡ面、内側に向いている面をＢ面、それ以外の面をＮ面とすると、

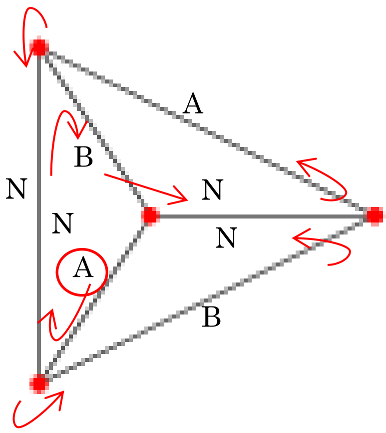
・ANBNANBNANBN・・・のように４節周期で繰り返す。

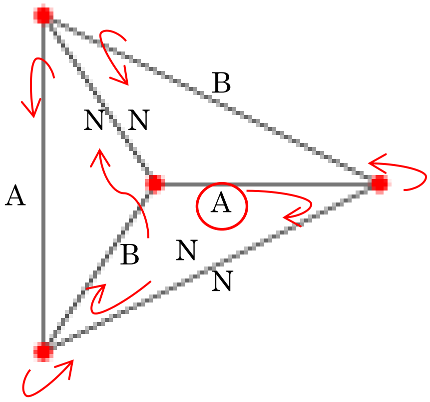
・多面体のある面の連続する３辺を巡って、最後の面がＡであれば進行方向右隣の面に移る。最後の面がＢ面であれば進行方向左隣の面に移る。

・４節周期で出発点にもどったら、そこでメビウスの面を閉じる。（ただし、デルタ１４面体等で確認されたことであるが、４節周期で出発点に戻ったとしても、最後のＮ面が最初のＡ面と同じ角柱にある場合は、メビウスの面はまだ閉じることはなく、最後のＮ面が出発点に接する隣の角柱に属するときまで繰り返す。）

まず、正４面体のグラフを使ってメビウス面のつながりを書き込んでみよう。

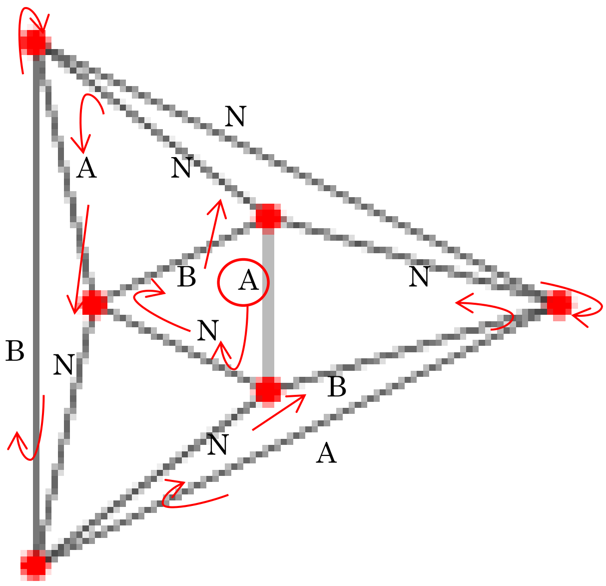


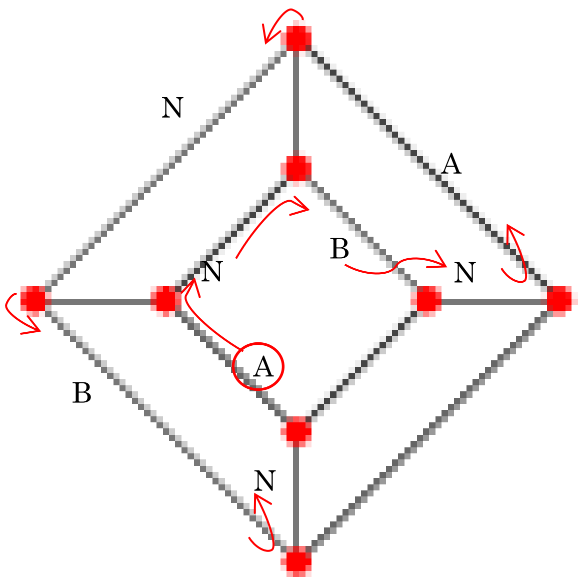


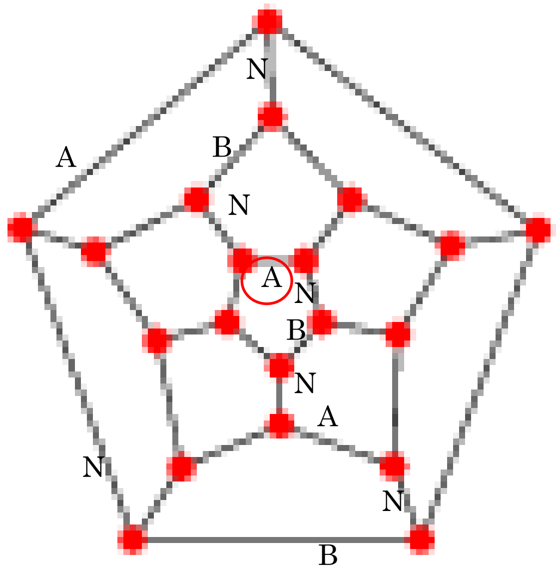


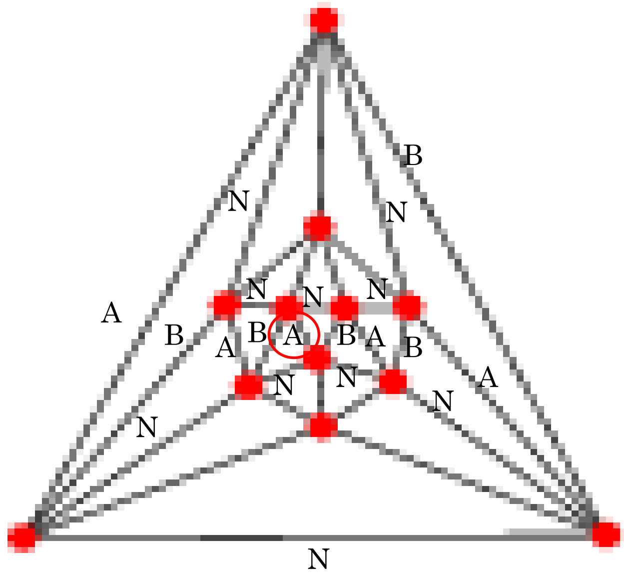
正４面体の場合は、上の３本の８節のメビウスの帯で全てであることは、３つの図を重ねてみると、それぞれの稜が ABNN で過不足なく埋め尽くされることから確認できる。

他の４種類の正多面体については、それぞれ１本のメビウスの帯だけを示すにとどめておく。


N
A
N
B
A
N
N
B
N
B
N
A


N
A
B
N
N
A
B
N


N
A
B
N
A
N
B
N
A
N
N
B


B
N
N
A
N
N
N
B
B
A
B
A
B
A
A
N
N
A
N
N
N

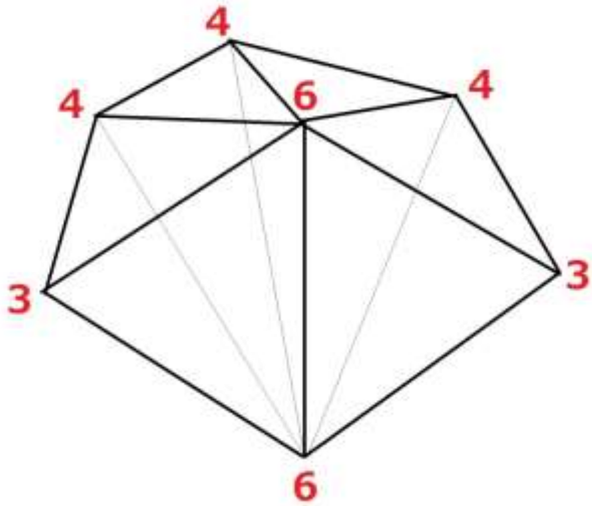
メビウス角柱多面体について（７）

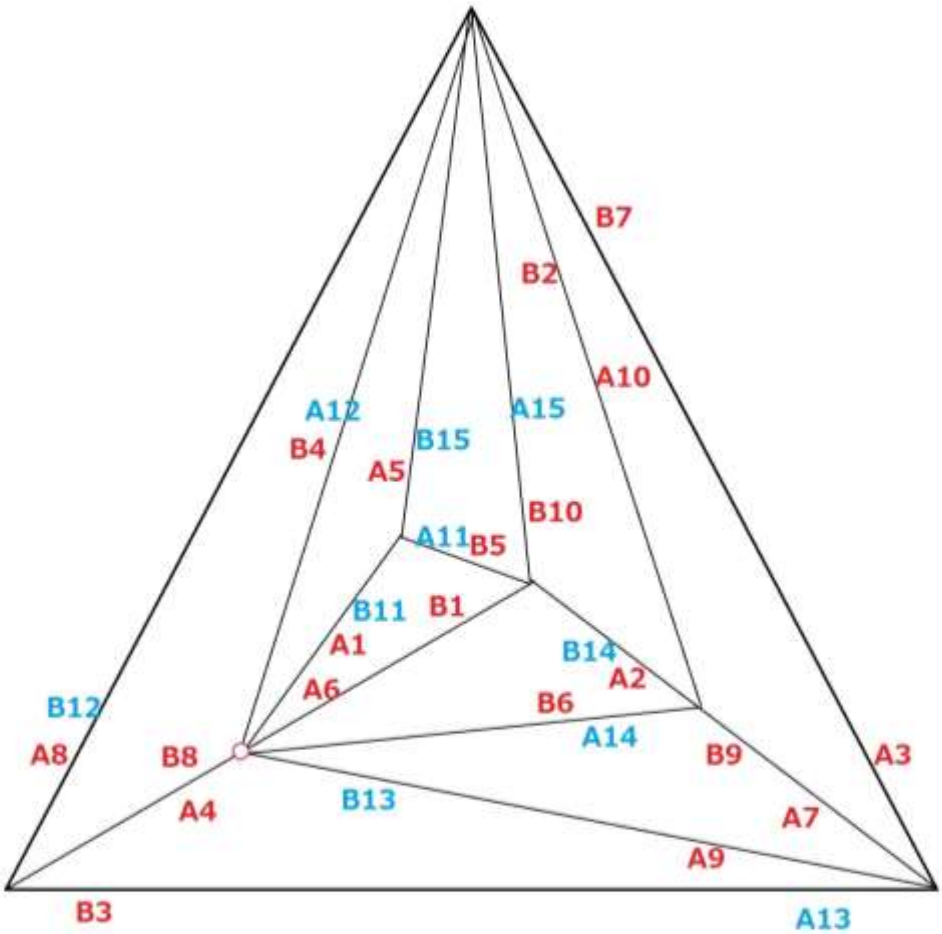
中川宏

メビウス角柱多面体	柱	面	頂点に集まる柱	最大の回転対称	メビウス面の節数	メビウス面の本数
正４面体	6	２４	3	3	8	3
正６面体	１２	４８	3	4	8	6
正８面体	１２	４８	4	4	１２	4
正１２面体	３０	１２０	3	5	１２	１０
正２０面体	３０	１２０	5	5	２０	6
切頂４面体	１８	７２	3	3	8	9
切頂６面体	３６	１４４	3	4	8 １２	１２ 4
切頂８面体	３６	１４４	3	4	１２	１２
切頂１２面体	９０	３６０	3	5	8 ２０	３０ 6
切頂２０面体	９０	３６０	3	5	２０	１８
立方８面体	２４	９６	4	4	１２	8
小菱形立方８面体	４８	１９２	4	4	１６	１２
大菱形立方８面体	７２	２８８	3	4	１６	１８
ねじれ立方体	６０	２４０	5	4	６０	4
２０・１２面体	６０	２４０	4	5	１２	２０
小菱形 20・12 面体	１２０	４８０	4	5	２０	２４
大菱形 20・12 面体	１８０	７２０	3	5	２０	３６
ねじれ 12 面体	１５０	６００	5	5	１００	6
菱形１２面体	２４	９６	３，４	4	１２	8
長菱形１２面体	２８	１１２	３，４	4	２８	4
六角柱	１８	７２	3	6	8 １２	6 2
デルタ６面体	9	３６	３，４	3	１２	3
デルタ１０面体	１５	６０	４，５	5	１２	5
デルタ１２面体	１８	７２	４，５	2	１６ ４０	2 1
デルタ１４面体	２０	８０	４，５	3	１６	5
デルタ１６面体	２４	９６	４，５	4	１６ ４０	1 2

この表を眺めていてぼんやりと見えてくるのは、三角形の面数が多い立体のメビウス面数は少ないということだろう。とくにデルタ多面体の４，６，１２，１６面体は最小の３本となっている。これまでは

凸のデルタ多面体に限って調べてきたが、メビウス角柱多面体にとっては凸か凹かはどちらでもかまわないことであるし、また、面が正三角形であることも必要な条件ではないので、鋭角二等辺三角形にして凹みを膨らみに変形することもできる。そこで凹のデルタ多面体も調べてみた。
最初に作ったのは凹デルタ８面体、これはデルタ６面体（重三角錐）に正四面体を貼りつけた形である。これのメビウス面は、２０節と２８節の２本であった。これはひょっとすると最小本数の１本のものもあるかもしれないと期待して凹デルタ１０面体を調べてみると、なんと実際に１本であった。





煩雑になるのでＮ面は省略してあるが、Ａ面Ｂ面を番号順に追ってもらえば確認できると思う。

メビウス角柱多面体	柱	面	頂点に集まる柱	最大の回転対称	メビウス面の節数	メビウス面の本数
正４面体	６	２４	３	３	８	３
正８面体	１２	４８	４	４	１２	４
正２０面体	３０	１２０	５	５	２０	６
デルタ６面体	９	３６	３，４	３	１２	３
デルタ１０面体	１５	６０	４，５	５	１２	５
デルタ１２面体	１８	７２	４，５	２	１６ ４０	２ １
デルタ１４面体	２０	８０	４，５	３	１６	５
デルタ１６面体	２４	９６	４，５	４	１６ ４０	１ ２
凹デルタ８面体	１２	４８	３，４，５	２	２０ ２８	１ １
凹デルタ１０面体	１５	６０	３，４，６	２	６０	１

メビウス角柱多面体について（８）

中川宏

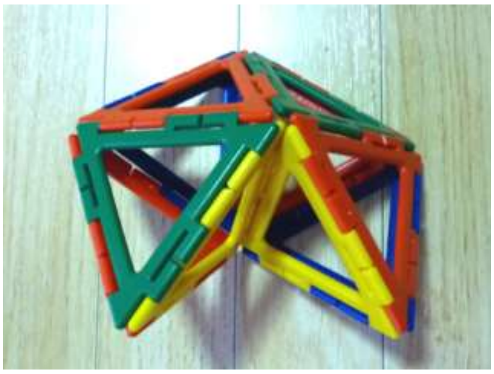
凹デルタ多面体の中でメビウス面数１のものがほかにもないかと、正四面体のタワーを調べてみたところ、正四面体６個のタワー(凹デルタ１４面体)もメビウス面数が１であることが確認できた。正四面体１個から５個までのタワーはメビウス面数は２あるいは３であるので、次に６の倍数１２個のタワー(凹デルタ２６面体)も調べてみると、期待通りメビウス面数は１であった。おそらく６の倍数タワーすべてで同様であろうと思われる。

メビウス角柱多面体	柱	面	頂点に集まる柱	最大の回転対称	メビウス面の節数	メビウス面の本数
正４面体	6	２４	3	3	8	3
正８面体	１２	４８	4	4	１２	4
正２０面体	３０	１２０	5	5	２０	6
デルタ６面体	9	３６	３，４	3	１２	3
デルタ１０面体	１５	６０	４，５	5	１２	5
デルタ１２面体	１８	７２	４，５	2	１６ ４０	2 1
デルタ１４面体	２０	８０	４，５	3	１６	5
デルタ１６面体	２４	９６	４，５	4	１６ ４０	1 2
凹デルタ８面体	１２	４８	３，４，５	2	２０ ２８	1 1
凹デルタ１０面体	１５	６０	３，４，６	2	６０	1
凹デルタ１４面体 （テトラタワー６）	２１	８８	３，４，５，６、	1	８８	1
凹デルタ２６面体 (テトラタワー１２)	３９	１５６	３，４，５，６、	1	１５６	1

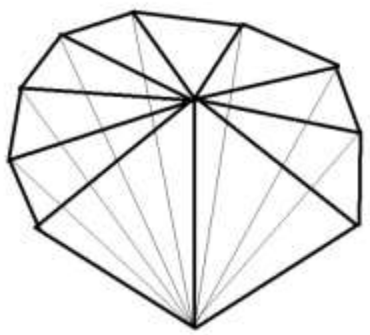
メビウス角柱多面体について（９）

中川宏

最初にメビウス面数１であることを確認した凹１０面体



これは重四角錐を一か所切り開いた形と観ることもできるが、重八角錐、重十二角錐・・・などを一か所切り開いた形も同じくメビウス面数１かもしれないと予想を立てて、重八角錐を一か所切り開いた立体(凹デルタ１８面体)を調べてみた。予想通りメビウス面数は１であった。



メビウスの帯１本からなるメビウス角柱多面体

メビウス角柱多面体	柱	面	頂点に集まる柱	最大の回転対称	メビウス面の節数	メビウス面の本数
凹デルタ１０面体（開重４角錐）	１５	６０	３，４，６	2	６０	1
凹デルタ１８面体（開重８角錐）	２７	１１８	３，４，６	2	１１８	1
（開重４ｎ角錐）	12n+3	4(12n+3)	3,4,6	2	4(12n+3)	1
凹デルタ１４面体（テトラタワー６）	２１	８８	３，４，５，６、	1	８８	1
凹デルタ２６面体（テトラタワー１２）	３９	１５６	３，４，５，６、	1	１５６	1
（テトラタワー６ｎ）	18n+3	4(18n+3)	3,4,5,6	1	4(18n+3)	1

（自然数ｎの項は予想）