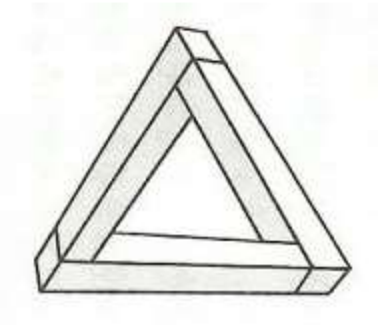
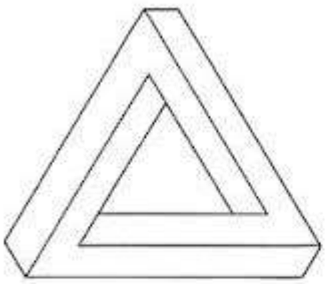
ペンローズの三角形について

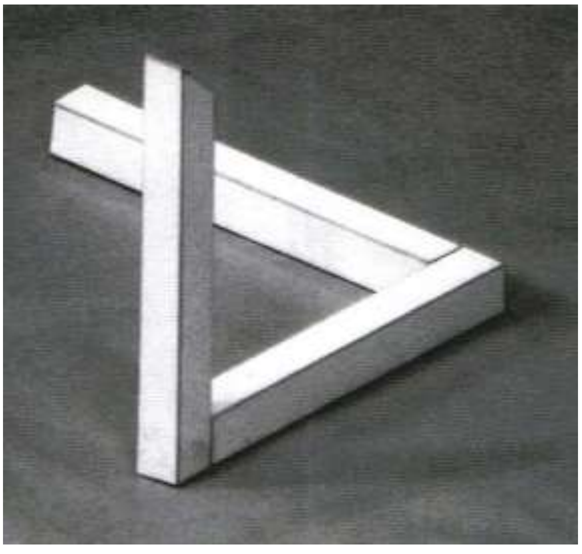
中川宏

島根県津和野市出身の画家・安野光雅の「空想の絵本」のなかに、ペンローズの三角形をもとにして、３本の木材を組み合わせたものがあった。そのものは載せられないので、イメージ図しか紹介できない。





本物はもっとリアルに角材の木肌が描かれている。
この実物を木材で作ってみたいと思って調べてみたのだが、いわゆるトリックアートのようなものしか見つからなかった。



ほんとうにこういうものしかできないのだろうかという疑問がわいた。

厚紙で試行錯誤の末、次のようにすればできることが分かった。

ペンローズの三角形の頂点の接合具合を忠実に再現するには、材料の角材をねじることが必要であった。それぞれの角材の両端について９０度のねじりが加えてある。そこでメビウスの帯と共通性がありそうだと見当がついた。

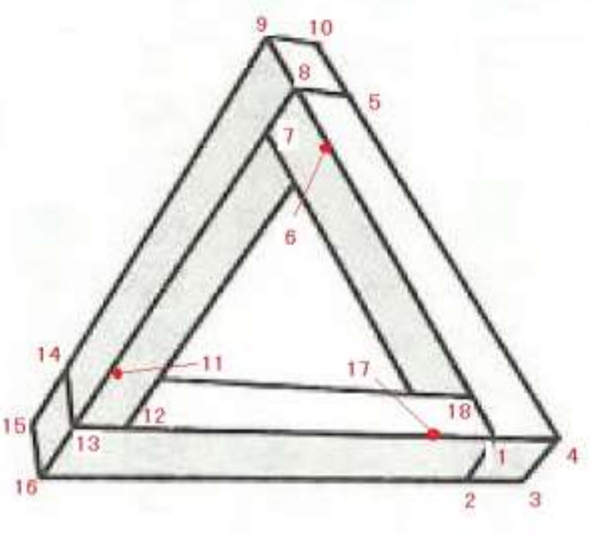
Wikipedia を調べてみると、「ペンローズの三角形の面を追いかけていくと、３重のメビウスの帯になっていることがわかる」という記述が見つかった。ところが、じっさいに作った模型で面を追って行ってみると４周で出発点にもどる。変だなと思って何度も確かめたがやはり４周で間違いない。考えてみると、角材は四角柱だから、もし３周でもどるなら、１面は通らないところがあることになるから、やはり３周というのは間違いのようだ。出典は特に書かれていなかったが、Wikipedia 英語版の誤りをそのまま翻訳したようだ。３周だと勘違いする原因は容易に推測できる。ペンローズの三角形の絵を見て、面をたどっていく際に、描かれていない裏側には１面しかないとみなしたに違いない。いいかえると四角柱ではなく、三角柱だとみなしてしまったということだ。

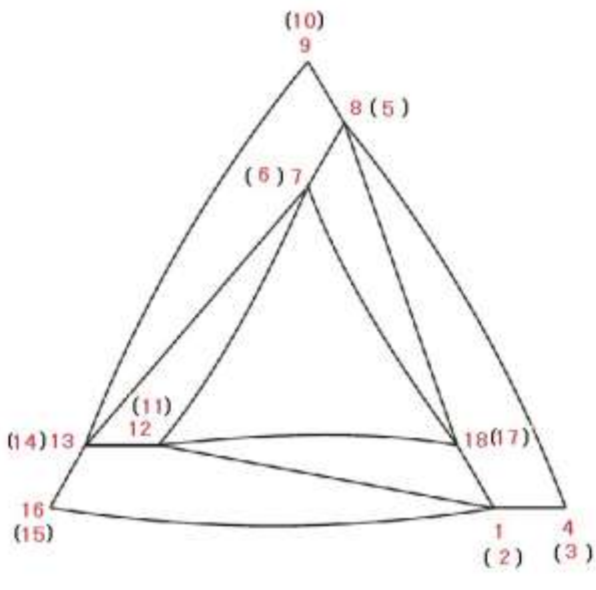
ともあれ Wikipedia 上で１０年以上訂正されずにきた誤りに気付くことができたことは、今回模型を作ってみた甲斐があったといえる。

最近手に入れた「別冊サイエンス・数学ゲームⅢ」(マーチン・ガードナー著、一松信訳、１９８１年)を読んでみるとちょうど、「メービウスの帯」という項目があった。「過去１５年間にわたって、私は読者から独立に、メービウスの帯は実はねじれた角柱であるということを指摘したり、その角柱の断面を任意の辺をもった正多角形に一般化したりした手紙を数十通受け取ってきた」と述べて、マーチン・ガードナーはｎ角柱をｋ回ねじった「柱状環」について考察している。それに従えば、ペンローズの三角形は四角柱を３回ねじった柱状環とみなすことができるのであるから、面数は１であり、三角形を４周する間に四角柱の４面すべてをまわって元に戻ることになる。

さいごに、ペンローズの三角形が見る人に違和感を与える理由を考えてみたい。

１回ねじった四角柱を３本組み合わせたものを素直に描くと右の図のようになる。このとき括弧でくくった数字の頂点は重なって隠れている。この重なりができるだけ少なくなるように書き表した図が左のペンローズの三角形であるといえよう。そこには視点を移動させて初めて見える光景が組み込まれているために、遠近法に慣れた目には違和感をよびおこすが、ねじれた図形をわかりやすく描く図法としては、これに勝る方法はないと思える。

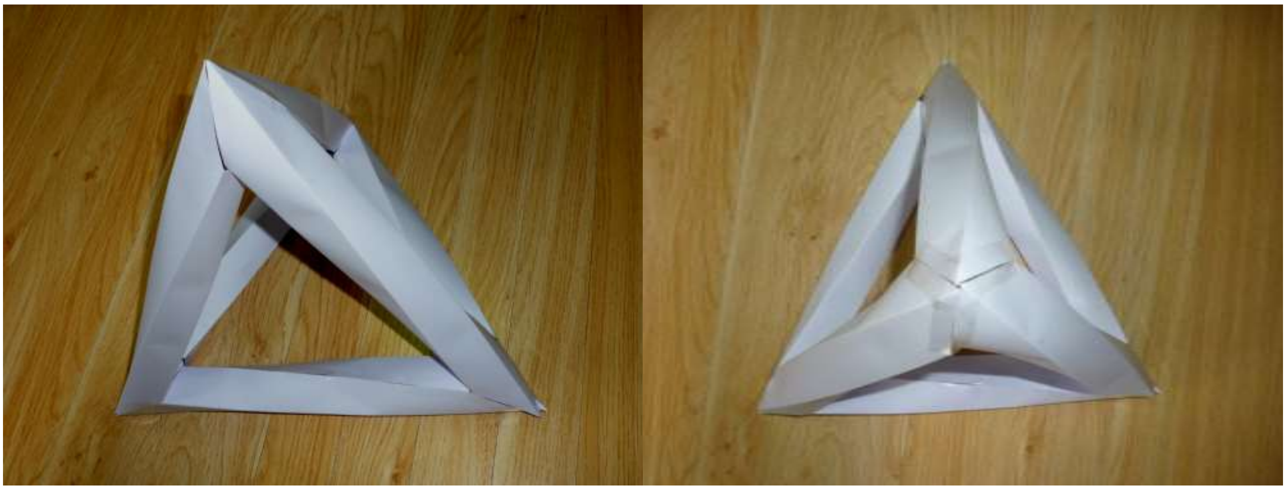




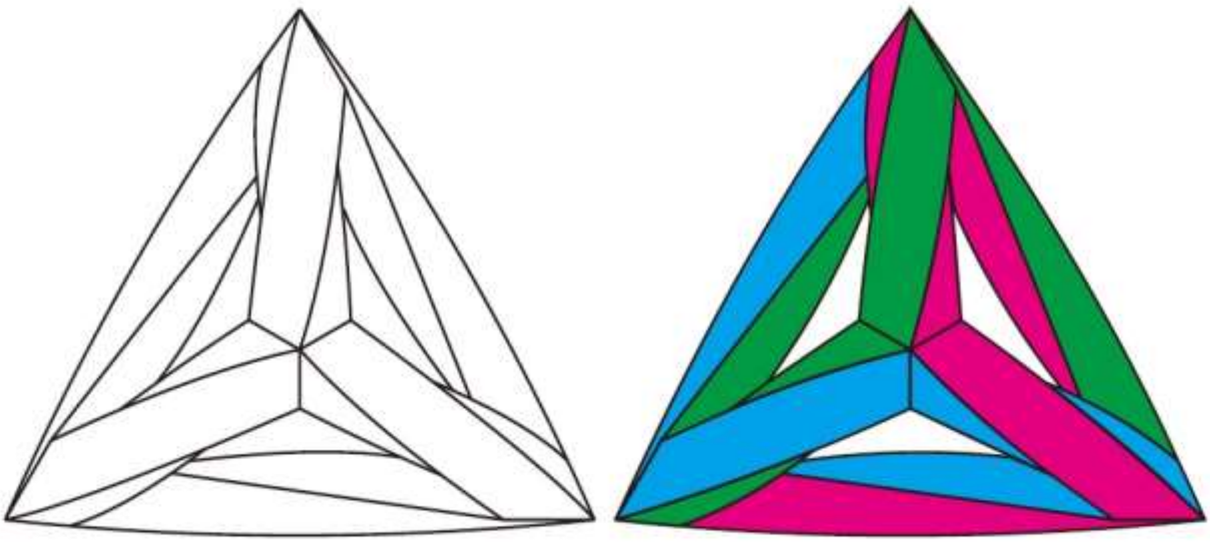
ペンローズの三角形について（２）

中川宏

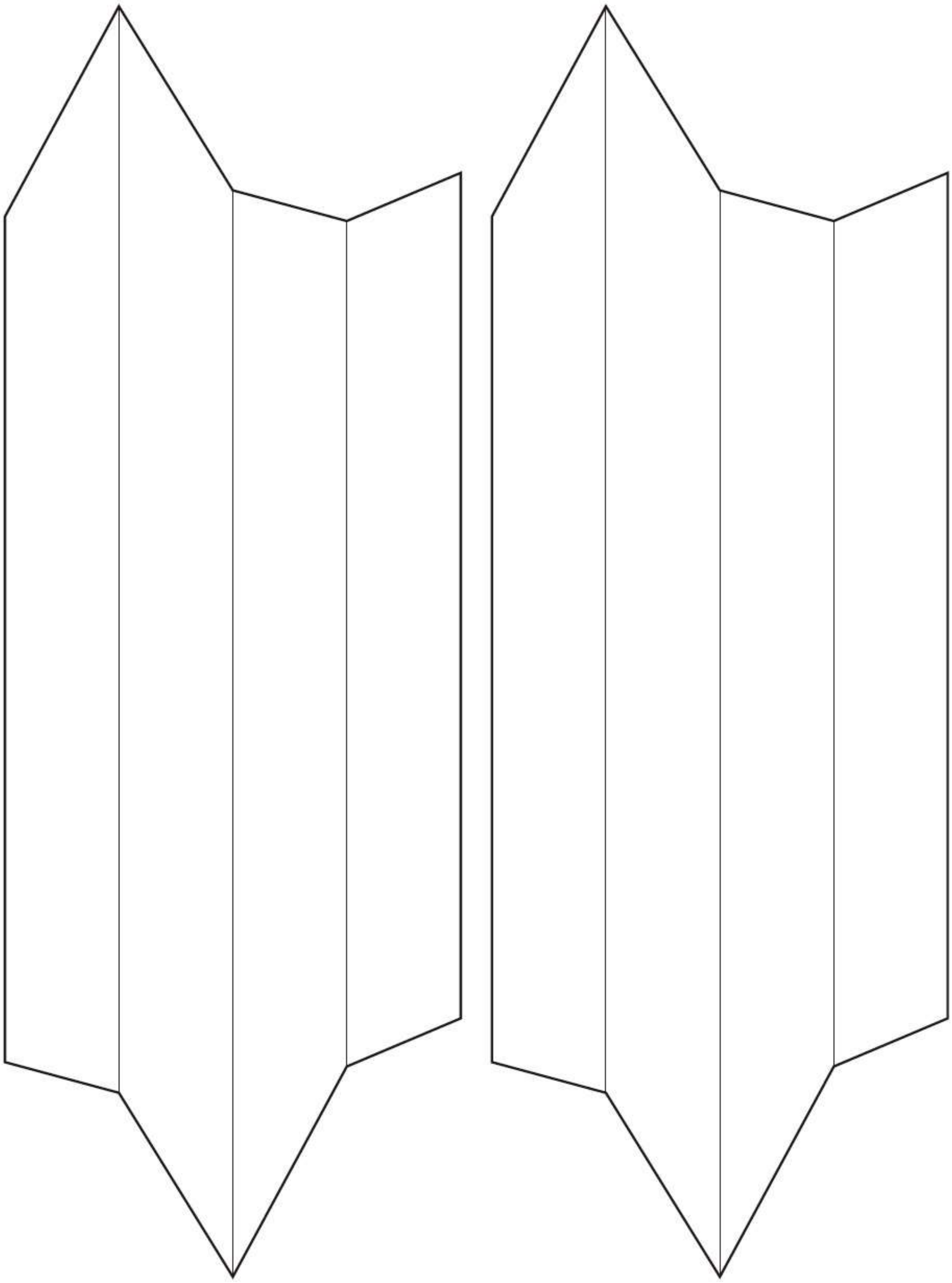
ペンローズの三角形は９０度ねじった四角柱を３本組み合わせて作ることができた。
そこで、正四面体の各面をペンローズの三角形に置き換えたような構造物をつくることができるかどうか試してみた。
ねじりの向きが合うのかどうか心配したが、できることがわかった。



ペンローズの三角形は、１つのメビウスの帯からできていたのだが、この四面体はいくつのメビウスの帯からできているのだろうか？４面だから４つだろうか？それとも６本の柱だから６つだろうか？
印をつけながら面をたどってみると、驚いたことにそのいずれでもなく、メビウスの帯は３つであった。つまり、それぞれのメビウスの帯は８つの面を含んでいた。その８つというのは、四面体の１組の対辺から２面ずつ、そして残りの４辺から１面ずつという組み合わせであった。対辺の２面は隣り合わない平行な２面である。見える範囲で色分けした図を示す。



作ってみようという人のために、折り紙展開図を作ってみた。本来曲線であるところを直線で代用したおおざっぱなものであることをご理解の上、お使いください。

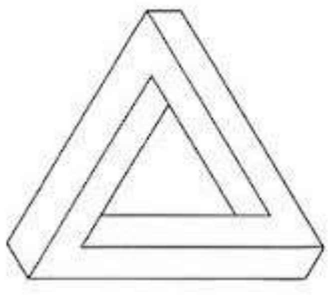


ペンローズの三角形について（３）

中川宏

ペンローズの三角形から安野光雅による角材化を経て、次元を上げて９０度ねじった角材によるメビウス角柱多面体におけるメビウス面を調べ上げてきたので、再び次元を下げてペンローズの多角形と呼ばれる図形のメビウス面を考えてみたい。

ペンローズの三角形



メビウス角柱多面体につけた面の記号を適用すると、

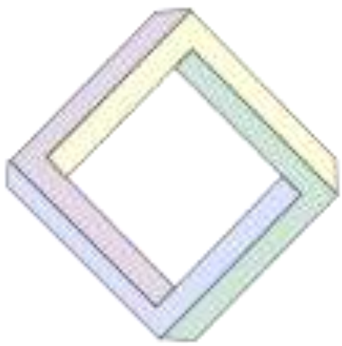
１ ２ ３ ４ ５ ６ ７ ８ ９ 101112

ＡＮＢＮＡＮＢＮＡＮＢＮ

１周　２周　３周　４周

メビウス角柱多面体上のメビウス面は４の倍数の節をもつことがわかっているので、１周３節のペンローズの三角形のメビウス面が閉じる条件は、４と３の最小公倍数１２節(４周)となる。ペンローズの三角形の節の総数は３×４＝１２であるから、ペンローズの三角形は１本のメビウスの帯で覆われることがわかる。

同様にペンローズの四角形は、



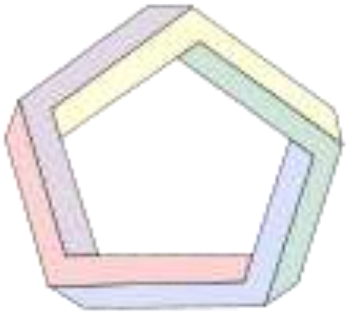
１ ２ ３ ４

ＡＮＢＮ

１周

となるから、ペンローズの四角形上のメビウスの帯は１周（４節）で閉じる。したがって４本のメビウスの帯を持つ。

ペンローズの五角形は、

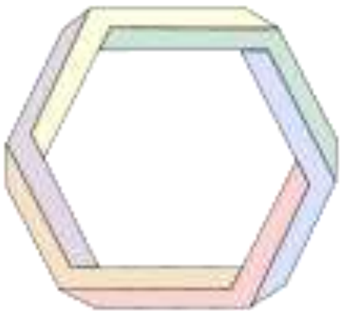


１２３４５６７８９1011121314151617181920
ＡＮＢＮＡＮＢＮＡＮＢＮ　ＡＮ　ＢＮＡ　ＮＢＮ

　１周　　　２周　　　　３周　　　　４周

となって、４周(２０節)の１本のメビウスの帯を持つ。

ペンローズの六角形は、



１２３４５６７８９101112
ＡＮＢＮＡＮＢＮＡＮＢＮ

　１周　　　２周

となるから、２周(１２節)のメビウスの帯を２本持つことがわかる。

このように、幾何学上の問題を一旦次元を上げて考え、そこで得たことを再び次元を下げて適用することによって、より深く理解するというのは、佐藤先生が出会った時から今日まで、教えてくれ続けていることであろうとおもう。

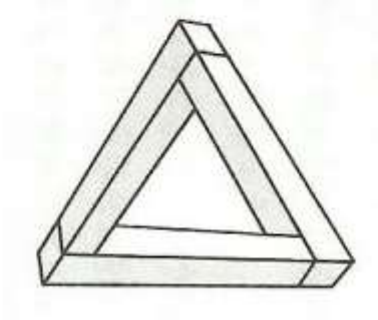
ペンローズの三角形について（４）

中川宏

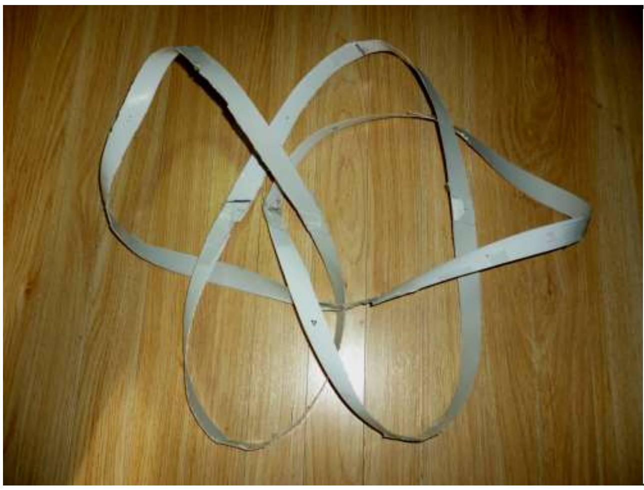
メビウスの帯１本からなるメビウス角柱多面体

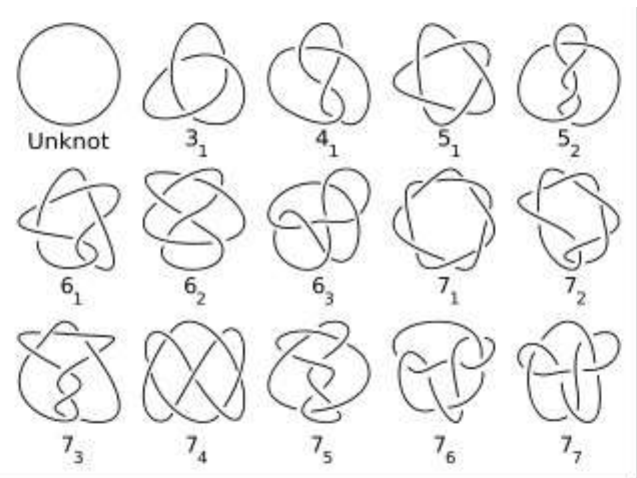
メビウス角柱多面体	柱	面	頂点に集まる柱	最大の回転対称	メビウス面の節数	メビウス面の本数
凹デルタ１０面体（開重４角錐）	１５	６０	３，４，６	2	６０	1
凹デルタ１８面体（開重８角錐）	２７	１１８	３，４，６	2	１１８	1
（開重４n 角錐）	12n+3	4(12n+3)	3,4,6	2	4(12n+3)	1
凹デルタ１４面体（テトラタワー６）	２１	８８	３，４，５，６、	1	８８	1
凹デルタ２６面体（テトラタワー１２）	３９	１５６	３，４，５，６、	1	１５６	1
（テトラタワー６ｎ）	18n+3	4(18n+3)	3,4,5,6	1	4(18n+3)	1

メビウスの帯１本からなるメビウス角柱多面体はこれだけなのか、またなぜこれらのメビウス角柱多面体は１本のメビウスの帯となるのかということについては、いまだに見当もつかない。
そこで、ふたたびペンローズの三角形のメビウス角柱体にもどって、１本のメビウスの帯がどのように角柱三角形をなしているのか調べてみた。



メビウス角柱三角形の稜線に沿って、切り開いてみた。





三角形の頂点部分の帯が６０度の角度がついているところはまっすぐに修正しているが、これはまず、何らかの結び目であることがわかった。７つの交点以下の結び目一覧で探してみると、鏡像になってはいるが、右下の 7_7 に該当するようである。

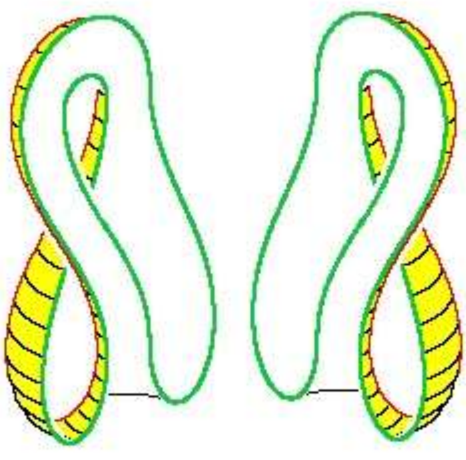
次に、この１本のメビウスの帯を一か所切断して、何回ねじってあるのかを調べてみた。
初めてのことなのでやり方がわからなかったが、切り口の両端の向きを変えずに、２度結び目をくぐらせて結び目のない状態にして、１０回振じったらまっすぐな帯になった。メビウスの帯においては、１回振じるというのは１８０°回すことである。また、メビウスの帯のばあいに比較の対象はねじりのない円環であるが、円環を切断して平らな帯にすると２回振じりが加わる。つまり平らな帯にしないで円環にするには２回振じる必要がないわけなので、じっさいは８回の振じりがあったと思われる。
ペンローズの三角形を９０度ねじった角柱で作ると、１２節のメビウスの帯となるので単純計算すると１８０度×６回のねじりとなるが、さらに円環にするために２回振じる必要があるので合計８回のねじりということであろう。

いいかえると、８回振じって 7_7 の結び目を持つメビウスの帯の縁をうまく貼り合わせれば、ペンローズの三角形ができる、ということになる。

メビウスの帯については、m 回ねじった帯をハサミで n 等分すれば意外な帯ができることや、２つの向きの違うメビウスの帯を貼り合わせればクラインの壺となることなどが知られている。

半回転の数(m)	切断回数	切断位置 n 等分	出来る帯の長さ・振れ	本数
1	1	2	2L・4m	1
1	1	3	2L・4m L・m	1 1
2	1	2	L・2m	2
3	1	2	2L・8m	1
3	1	3	2L・6m L・3m	1 1

ペンローズの三角形は穴１つのトーラス、メビウス角柱多面体は複数の穴のトーラスと観ることもできるし、全てのメビウス角柱多面体が１本ないし複数のメビウスの帯に切り分けられるのであるから、メビウス角柱多面体は、＜メビウスの帯＞と＜結び目＞と＜トーラス＞が絡み合った領域の問題といえそうだ。



クラインの壺を縦に割ったところ