

多面体の分類について

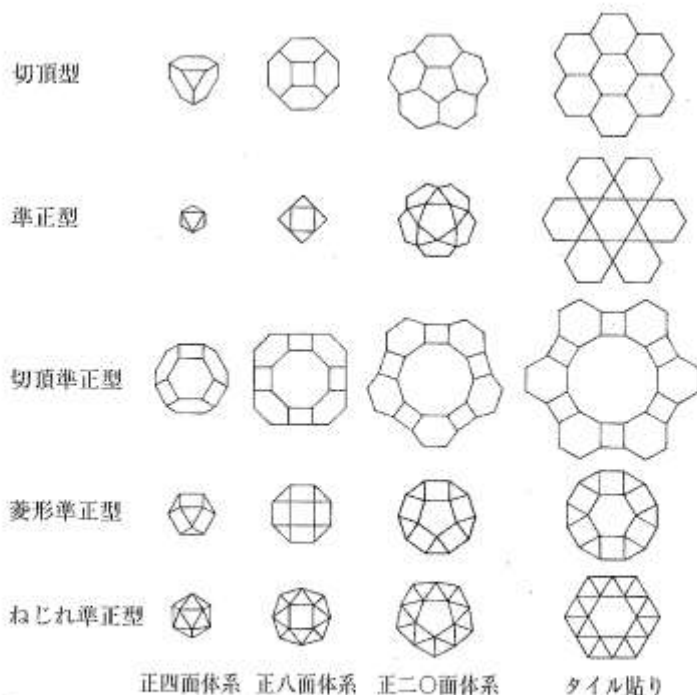
中川宏

昨年2016年末、丸善出版から、宮崎興二先生の「多面体百科」が出版されました。先生の長年の多面体研究の集大成と言っても過言ではない大作で、高次元図形については大胆に割愛して、そのぶん三次元の立体についてわかりやすく解説されています。また、たくさんの研究者や多面体作家との交流や協力を背景にしていることがつぶさに見て取れるという意味では、宮崎先生の人脈図鑑でもあり、多方面に興味関心を広げてくれる好適の入門書でしょう。自費出版の共著「多面体木工（寄贈版）」まで巻末の参考文献に挙げていただいたことには、先生のお人柄を感じ、感謝にたえません。

さて、ここで私が注目したいのは、「半正多面体」の項です。

「半正多面体」という言葉は「準正多面体」という言葉よりも知られていませんが、その責任は宮崎先生による誤訳にあることをご自身で表明されているというこれまた先生らしい珍しい曰くつきの用語です。さしあたり用語については、準正多面体は立方八面体と十二・二十面体をさし、それを含んで13種類かぞえられる、正多面体の条件を複数種類の正多角形にゆるめた立体をさして半正多面体とよぶことを理解しておきます。

用語の区別はともかく、この項目で先生が踏み込んで見解を示しておられる点は、半正多面体のなかから、5種類の正多面体を切頂して得られる<切頂型>5種類（切頂四面体・切頂立方体・切頂八面体・切頂十二面体・切頂二十面体）をまずひとくくりにし、その他の8種類を<準正型>とその変形とみなすことにあります。<準正型>の変形は<切頂準正型>、<菱形準正型>、<ねじれ準正型>の3種類に分類されます。そして次のような美しい図表が掲げられます。



14 アルキメデスの立体の平面図の中心部分(左3列)と、平面上の正多角形によるタイル貼り(右端列)の関係

(「多面体百科」208ページより)

表の左から右に、周囲の図形を変えることなく、中央の図形のみが正三角形→正方形→正五角形→正六角形（3段目のみ、それらの二倍角形）へと変化していく様子が整然と示されています。アルキメデスの立体と呼ばれる多面体とアルキメデスのタイル貼りと呼ばれる平面充填パターンが一体的に示されていることも秀逸です。

なんときれいな図になるものだとほれぼれ眺めていて気が付いたことがありました。

なぜ $3 \times 5 = 15$ なのか、よく見ると二段目左は正八面体で、五段目左は正二十面体、これらは正多面体だからマイナス2で13種類、ぴったりです。そこで次にひとつひとつに名前を振っていくと、同じものが2か所にあったり、はずれている半正多面体があることに気が付きました。つまり1段目2列目と3段目1列目はいずれも切頂八面体であり、2段目2列目と4段目1列目はいずれも立方八面体です。そのぶん、切頂立方体と切頂十二面体がこの表からははずれているのです。

もちろんこの2種類の除外は宮崎先生が意識的にやむを得ないものと判断してなされたものであること、それは縦の3列を正四面体系・正八面体系・正二十面体系と名付けられていることから必然であることは理解できました。しかし同時にこの2種類も含めた図を作ることはできないものだろうかという課題が私には浮かびました。また、先生が切頂型5種類と準正型およびその変形8種類を区別されていることにも、木工法の観点からは疑問がありました。立方八面体は立方体を切頂することによって、また十二・二十面体は正十二面体を切頂することによって作っているからです。切頂型5種類だけ正多面体5種類に関係づける必要があるのかどうかとも検討の余地があるように感じました。

そこで、正多面体と呼ばれている立体や半正多面体と呼ばれている立体、さらに正タイル貼りおよび半正タイル貼りと呼ばれているもののすべての括りを一旦取り払ったうえで、木工法の観点から並べなおしてみることにしました。

次のページの図表をご覧ください。

全ての出発点は中央の立方体です。立方体を最大限に切頂することによって正四面体ができます。また、立方体を黄金三角比に切稜することによって正十二面体ができます。これら3立体が半正多面体への加工の元になります。

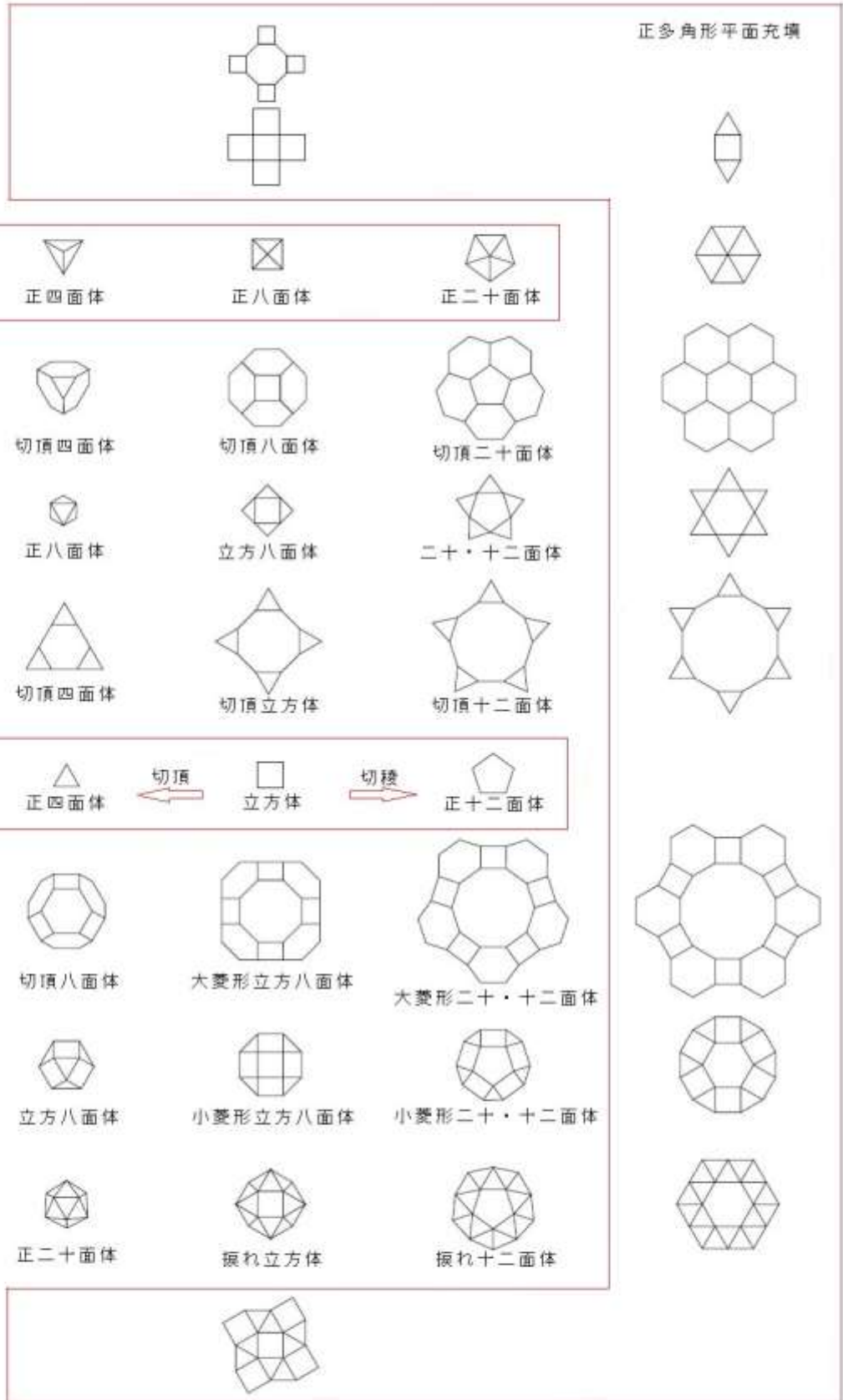
そこでこれら3立体を仮に「基本正面体」と名付けてひとくくりにしました。正多面体のうちから正多角形面が各頂点に3枚ずつ集まっているものをとりだしたとみなすこともできます。

「基本正面体」より上は「切頂多面体」のグループで、切頂の深さによって3段に分けました。さらに切頂を深めると、「双対正面体」に至ります。宮崎先生の表とくらべてもっとも大きく変わったのが「基本正面体」のすぐ上の段<小切頂>です。ここに、切頂四面体・切頂立方体・切頂十二面体が入りました。対応する半正タイル貼りは正十二角形と正三角形によるものです。

他方、「基本正面体」より下は、「切稜・切頂多面体」のグループで、こちらも3段に<切稜・大切頂>、<切稜・小切頂>、<切頂・捩切稜>と名付けました。（加工・変形の詳細については、佐藤郁郎先生との共著「多面体木工増補版」や一松先生の「正多面体を解く」を参照してください。）

このような整理は5種類の正多面体が分散していたり、3種類の立体が2か所ずつに重複して現われたりすることから違和感が付きまとうかもしれませんが、かえって正多面体5種類・半正多面体13種類という大きな呪縛から一度離れてみて、多面体木工法のプロセスに徹することによって見えてくる美しい相関図を、幾何学好きの方にも楽しんでいただければうれしく思います。

多面体木工法による基本的な多面体分類



三

四

五

六

以上のレポートをお送りしたところ、一松信先生から以下のようなコメントをいただきました。

このたび多面体の分類についての所信をお送り下さり、有難うございました。

名前（述語）を確定させることは大事ですが、慣用もあるでしょう。

私自身は、アルキメデスの立体の型を[宮崎先生の]図の上から順に第Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ類とよび、また立方八面体など正多面体に近いものを「亜正多面体」とよんでいました。

正四面体系の半正多面体のうち、切頂型以外の4種が順次、正八面体、切頂八面体、立方八面体、正廿面体であることはご存じだと思います。（この種の”重複”は3次元と4次元の正多胞体にのみ見られることも知られております。）

木工で模型をお作りになる折には、これらの性質も考慮なさるとよいかも知れません。

宮崎先生の「多面体百科」は名著と思います。出版記念会の講演（京都丸善支店）にも顔を出しました。

貴兄の多面体模型が日本だけでなく、世界的に広まってゆきそうなことをお喜び申し上げます。

7月13日

多面体の分類について（その2）

中川宏

宮崎興二先生の「多面体百科」を拝読して私をもっとも驚いたのは、「切稜多面体」（130ページ）という項目が登場したことです。その直前の「切頂多面体」と対をなすかのように取り上げられていますが、おそらくほとんどの人にとって耳慣れない用語ではないかとおもいます。

英訳は **Edge-truncated Polyhedron** とされていますので、3年前にインターネット上の辞書サイト **Wikipedia** の英語版にあらわれた **Chamfer(geometry)** とは直接の関係はないようですが、ほぼ同時期に英語圏でも国内でも、幾何学の分野に「切稜」という新たな概念が定着したことを喜ばずにはられません。

しかも、宮崎先生の「切稜多面体」の項では、英語版 **Wikipedia** にはみられない、より深い多面体の関係が考察されています。立方体を切稜すると切稜立方体ができ、さらに切稜を最大限まで推し進めると菱形十二面体となる、ということは「多面体木工」でも紹介してきたトピックですが、立方体を含めてすべての正多面体を極限まで切稜したらどうなるのか、ということが石井源久さん原案・作図の図解とともに明示されています。中間段階を省略して始点と終点を示すと、

正四面体→立方体

立方体→菱形十二面体

正八面体→菱形十二面体

正十二面体→菱形三十面体

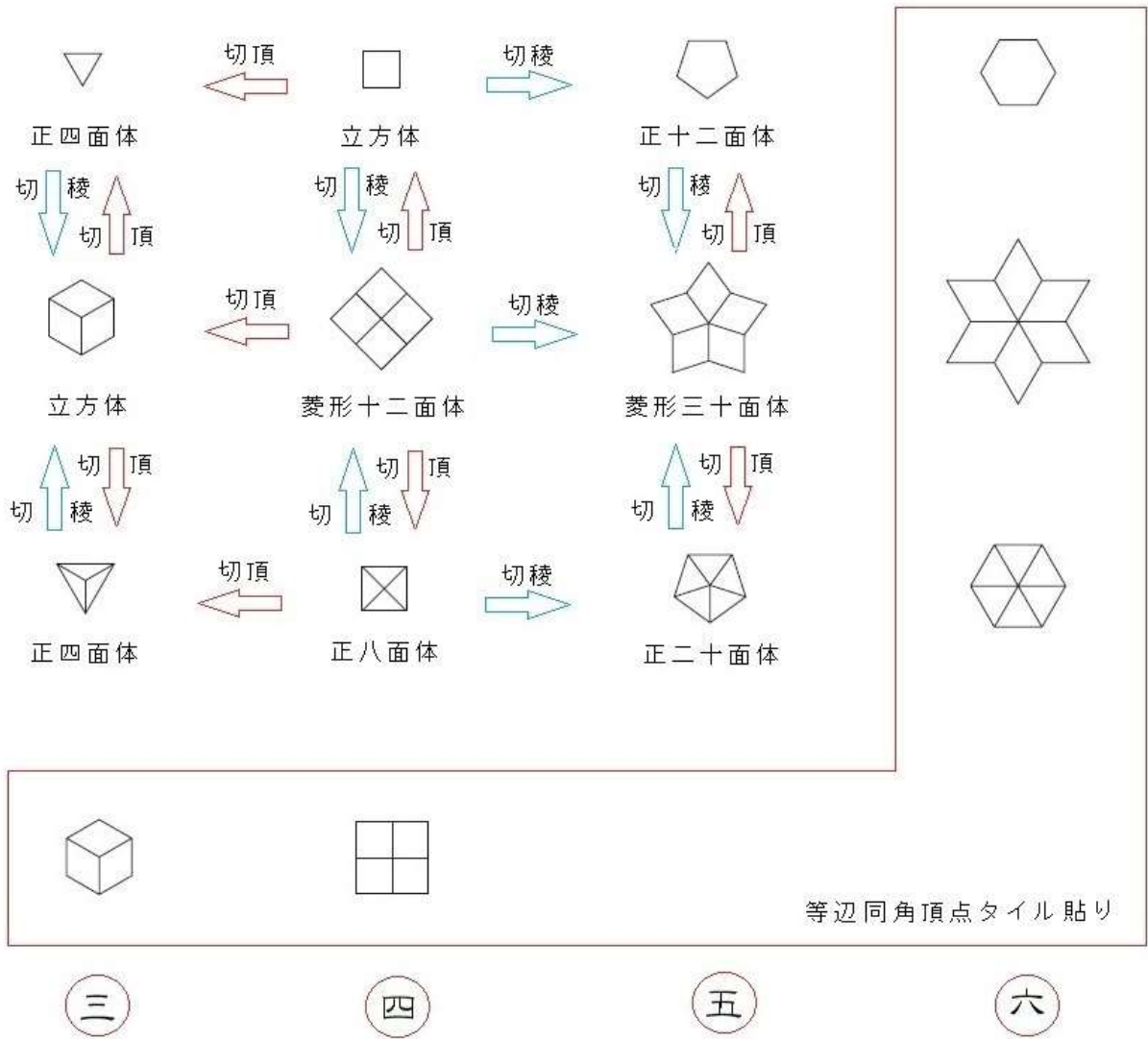
正二十面体→菱形三十面体

となります。

私自身は、菱形三十面体の作り方を模索した「多面体木工(寄贈限定版)」(2006年)当時、正二十面体

を切頂して、いいかえると正十二面体を切稜して、さらに切稜することによって菱形三十面体を作る方法を紹介したことはありましたが、正四面体を極限まで切稜することを発想したことはありませんでした。これには驚きました。

そこで、「多面体百科」の切頂多面体と切稜多面体の両項および「正多面体を解く」(一松信著)に書かれてある事柄を多面体木工の観点から総合して図にしてみました。



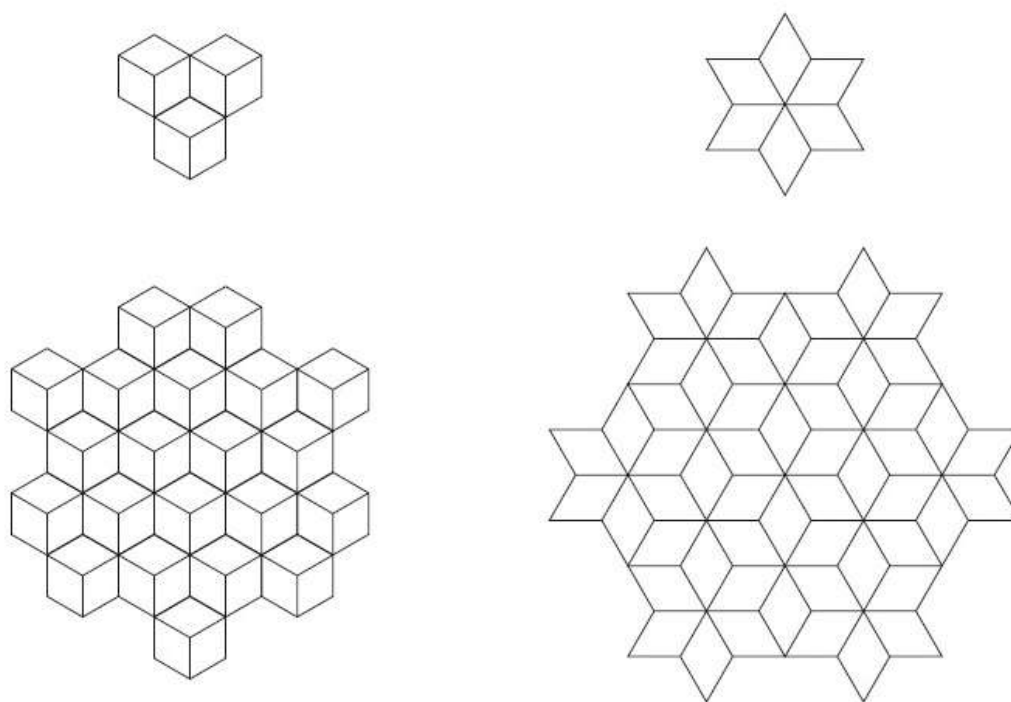
このように一覧にしてみると、幾何学の常識からすれば、1段目と3段目のたがいに双対関係をなす正多面体・正タイル貼りに挟まれて2段目にある菱形十二面体・菱形三十面体・菱形タイル貼りは一見異質な印象です。しかしデザインとして見るならば、2段目の図形を1段目の図形で切り取ると3段目の図形になるという整然とした配置になっていることに思いがけない感動を覚えます。

矢印の向きをたどると、双対の正多面体への変形というのは、上からでも下からでも切稜と切頂という加工の組み合わせであることがわかります。また菱形多面体から上へ向かう切頂と下へ向かう切頂とでは、加工の対象とする頂点の価数が異なること。つまり菱形十二面体から立方体への切頂は4価の頂点であるのにたいして、正八面体への切頂は3価の頂点、また菱形三十面体から正十二面体への切頂は5価の頂点であるのに対して、正二十面体への切頂は3価の頂点であることもわかります。このように考えていくと、双対関係をなす正多面体両者の性質を併せ持つ要の立体として、立方体を含む菱形多面体

が浮かび上がってきます。佐藤郁郎先生が、菱形十二面体は4次元立方体の3次元投影図形、菱形三十面体は6次元立方体の3次元投影図形と教えてくださることともつながってくるような気がします。

この点について考えるうえで有益な項目も「多面体百科」にはあります。「準正多面体」の項です。そこには、準正多面体 (Semi-Regular Polyhedron) とよばれる立方八面体と十二・二十面体の、それぞれの双対である菱形十二面体と菱形三十面体とを、ケプラーがハーフ正多面体 (Half Regular Polyhedron) と呼んだことが紹介されています。それについてはクロムウェルの「多面体」がくわしく、ケプラーがこの2種類の菱形多面体を半正多面体 (Quasi-regular Polyhedron) よりも正多面体に近い存在として位置づけようとしたことが記されています。クロムウェルによればケプラーの「ハーフ正多面体」の定義は成功していると言えないそうですが、上のように正多面体相互の関係を切稜と切頂を軸として理解する限り、ケプラーのいわんとしたことの意義は十分にくみ取れるのではないかと思います。

次に、菱形タイル貼りについて考えてみたいと思います。上の表では、2段目の右端と4段目の左端に分かれてありますが、敷き詰めてみると次の図のように同じものであることがわかります。



上の図の左は3回対称性をもつ頂点を中心にして、右の図は6回対称性を持つ頂点を中心にして描いた違いがあるだけで、両方の性質を持つ同一の菱形タイルです。

正タイルの3種類における頂点の対称性は、三角格子が6回、正方格子が4回、六角格子が3回ですから、菱形タイル貼りの対称性は2種類の正タイル貼り、三角格子と六角格子の両方の特徴を兼ね備えていると言ってよいでしょう。ちなみに半正タイル貼りのなかで頂点の対称性もっとも高いのが、2回対称性を持つ和名「かごめ」の三角・六角格子ですが、その双対が菱形タイル貼りであることが、「多面体百科」の155ページに示されています。

ケプラーであれば、この菱形タイルは Half Regular tiling と呼んだかもしれませんが、単一の等辺多角形からなり、頂点には同じ大きさの角が集まるという意味で、とりあえずここでは「等辺同角頂点タイル貼り」としておきます。