

## 射影図によるゾーン多面体の分類

H.M.S.Coxeter

編集者の許可を得て、*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 第 41 卷(1962 年)より転載

1.はじめに。3次元ユークリッド空間では、任意の格子（結晶学および数の幾何学で使用される種類の）に対して、他の格子点と同じくらい1つの格子点に近いすべての点で構成されるボロノイ多面体を定義できます。このような多面体のアフィン変形は平行多面体であり、これは一群の並進の凸状の基本領域として説明することができます。1885年、フェドロフは結晶学的調査の過程で5種類の平行多面体を列挙しました。1933年、ドローネは同じ列挙へのより簡単なアプローチを発見しました。現在はさらに簡単であると主張されている3番目の手順が発表されています。一方、4番目の方法が Moser によって発見されました。

フェドロフと同じように、我々は最初に中心対称の多角形で囲まれた立体として、より一般的なゾーン多面体を考えましょう。そして二次元での類似の問題の予備的な説明を行ったのち、我々は実射影平面において、すべての交点を持つ有限数の線で構成される代表的な構成に進みます。段落 9 では、平行多面体が構成の単純な指標によって、他のゾーン多面体と区別されていることを発見します。つまり、すべての線に2つまたは3つの点が含まれているのです。これは、平行多面体の構成が完全な四角形よりも複雑になることはないことを意味します。最後に、段落 11~14 で、数の幾何学に関連する2つの特定の例によって、4次元への可能な拡張を示します。

2.中心対称な多角形。-アフィン平面では、多角形が半回転（または"中央反転"あるいは"点対称"）によってそれ自体に変換される場合、多角形は中心対称であると言われます。明らかに、中心対称多角形には偶数の頂点があり、その対角線がすべて中心によって二等分されているペアを有します。反対側

の 2 つの辺は等しく平行です。 辺が 4 つ（および頂点が 4 つ）しかない場合、多角形は平行四辺形です。

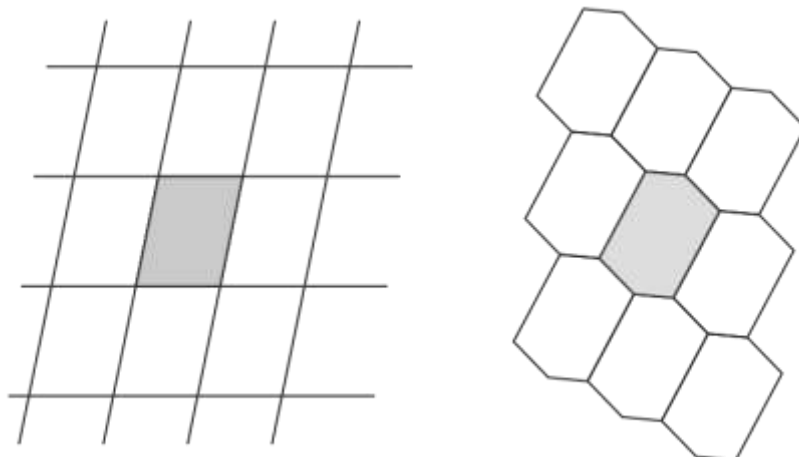


図 1

図 1 を調べると、4 辺または 6 辺を持つ中心対称の多角形の平行移動を繰り返すことによって、重なり合うことなく、隙間もなく平面全体を埋めるタイル貼りを形成できることがわかります。逆に、凸多角形の平行移動を繰り返して平面を埋めることができる場合、その辺の数は 6 を超えることはできません。これを証明するためには、並進のグループの適切なサブグループがトーラスの基本グループとして機能することを観察します (9)、14、16 ページ)。このグループ上で、与えられた無限のタイル貼りと局所的に同一の有限マップを描くことができます。そのようなマップに  $V$  個の頂点、 $E$  本の辺、および  $p$  角形の面が  $F$  枚ある場合、次のことを簡単に確認できます。

$$(2.1) \quad 3V \leq 2E = pF .$$

オイラー・ポアンカレ特性がゼロなので

$$E - V = F,$$

したがって

$$1/2 \cdot pF = E \leq 3(E - V) = 3F,$$

を得ます。そこから

$$p \leq 6.$$

異なる証明は、 $n$  次元における  $2(2^n - 1)$  数としてポロノイによって与えられ

ています。([3]、p225 参照)

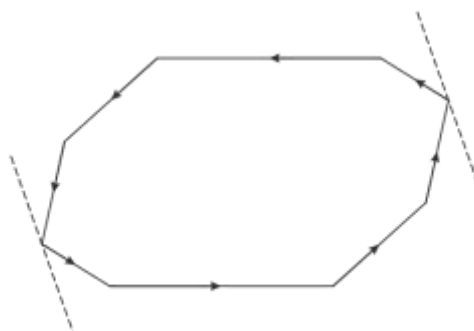


図 2

図 2 は、中心対称の  $2m$  角形の連続する辺に沿ったベクトルを示しています。図 3 は、すべて 1 つの点から出て星を形成する同じ  $2m$  のベクトルを示しています。星は、共通の中心点  $O$  を持つ  $m$  本の線分で構成されています。

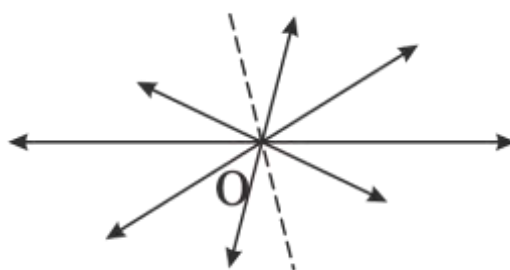


図 3

$O$  を通る任意の方向の線（図 3 の破線など）は、星の反対の角度のペアにあり、多角形をサポートする平行な線のペアを表します（図 2）。実際、多角形の頂角は星の角度の補角です。したがって、反対の頂点の  $m$  ペアは、星の  $m$  本の線が平面を分解する反対の角度領域の  $m$  ペアによって表されます。無限遠直線を追加して射影平面にアフィン平面を埋め込むと、星の  $m$  本の線は無遠直線（実射影直線）を多角形の反対側の頂点の  $m$  ペアを表す  $m$  本のセグメントに分解すると言えます。

明らかに、多角形のように、星は中心対称性を持っています。平面にユークリッド距離を与えると、ポリゴンの対称操作はすべて星にも属し、その逆も同様であるとさらに言えます。特に、多角形が長方形または菱形である場合（その対称群が 4 群  $D_2$  である場合）、星はそれぞれ菱形または長方形の対

角線で構成されます。ポリゴンが通常の  $2m$  角形である場合（つまりそのグループが二面体グループ  $D_{2m}$  あるいは  $4m$ ）、星は別の通常の  $2m$  角形の反対側の頂点に結合します。

ユークリッド平面の中心対称ポリゴンの重要な例は、格子のディリクレ領域として発生します。その内部は、他のどの格子点よりも 1 つの格子点に近いユークリッド平面のすべての点で構成されます ([11]、p216)。格子自体は中心対称であり、領域の各辺は 2 つの格子点から等距離にある点の軌跡の一部であるため、次の 3 つの条件を満たす場合に限り、特定の  $2m$  角形をディリクレ領域として使用できます。:

(i) それは中心対称です。

(ii)  $m = 2$  または  $3$ ;

(iii) の反対側のペアの中点を結ぶ線は、それらの辺に垂直です。つまり、頂点はすべて同一円周上にあります。

したがって、ディリクレ領域として許容される平行四辺形は、長方形（正方形を含む）のみです。

3. ゾーン多面体。-アフィン 3 次元空間では、ゾーン多面体 ([12]、p. 257) は、それぞれの面が中心対称である凸多面体です。すべての辺は、2 つの隣接する面ごとに、指定された辺に平行な辺で交わる面のゾーンを決定します。辺が  $n$  の異なる方向に発生する場合、 $n$  のゾーンがあります。共通の面を含む 2 つのゾーンが対蹠面で再び交わるため、ゾーン多面体全体が中心対称になります [5]。ゾーン多面体を与えられた場合、 $n$  を計算するための実用的な方法は、任意の頂点から反対側の頂点へ移動するために必要な最少の辺を数えることです。 (対蹠点までの距離を数える意義)

図 2 から図 3 への移行と同様の方法で、共通の中点  $O$  を持つ  $n$  個の線分で構成される 3 次元の星によって、 $n$  個のゾーンを持つゾーン多面体を表すことができます。各線分はゾーンに平行です。ゾーンに属する辺の 2 倍の長さです。ゾーン多面体を支持する任意の 2 つの平行な平面を、 $O$  を通る平行平面で表すと、3 次元の星には、ゾーン多面体の反対側の面の各ペアに対して 2

次元の星が含まれていることがわかります。したがって、任意のゾーン多面体は星で表すことができます。

逆に、星が与えられると、ゾーン多面体を再構築できます。これを確認するには、星のベクトルをペアごとに記号を任意に選択できる

$$\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_n,$$

で示します。

対応するゾーン多面体は、位置ベクトルが

$$O_1 e_1 + O_2 e_2 + \dots + O_n e_n, \text{ここで、} 0 \leq O_k \leq 1 \text{ (} k = 1, 2, \dots, n \text{)}$$

の点から構成されます。 $O_k$ の範囲は0から1の代わりに、 $-1/2$ から $1/2$ までとすることもでき、そうすれば、ゾーン多面体はそのままに、 $e_k$ と $-e_k$ にシンボル交換することができます。(このような変更は、ベクトル $e_k$ によって立体内の原点をシフトすることになります。)

4.最初の射影図。無限大の平面を追加してアフィン空間を射影空間に埋め込む場合、星の線と平面の代わりに、無限大の平面（実際の射影平面）によるそれらの断面を考慮することができます。言い換えれば、実際の射影平面内の点と線で星の線と平面を抽象的に識別することができます。結果として得られる構成は、ゾーン多面体の反対側の面のペアごとに1本の線で可能なすべての方法で結合された $n$ 個の点で構成されます。面が $2m$ 角形の場合、線には $m$ 個の点が含まれます。

任意のゾーン多面体が星とその結果としての一意の構成を決定しますが、無限遠の平面内の $n$ 点の特定のセットは、1つのゾーン多面体だけでなく、特定の方向にさまざまな長さの辺を持つゾーン多面体のファミリー全体を決定します。したがって、抽象的に考えられる実射影平面の特定の構成は、「同型」ゾーン多面体のファミリーを表します ([8]、p.106)。

不等式 (2.1) は、 $p$ を面の頂点の平均数とすると、さまざまな種類の面を持つ凸多面体に対して有効です。ここで $E - V = F - 2$ であるため、 $p = 6(F - 2) / F < 6$ であると結論付けます。面は $2m$ 角形 ( $m = 2, 3, \dots$ ) であるため、

数  $p$  は次のようになります。値 4、6、...のみを取ることができる一連の数値の平均。...  $p < 6$  なので、値 4 は少なくとも 1 回は発生する必要があります。したがって、ゾーン多面体の面には、少なくとも 1 対の平行四辺形 ( $m = 2$ ) が含まれている必要があります。この図では、これは、実射影平面内の  $n$  点の結合に、2 点のみを含む少なくとも 1 本の線が含まれている必要があることを意味します。したがって、多面体の理論は、シルベスターの有名な予想の証拠を提供します ([17]、p.452)。

$n$  点の結合には、実際には 2 点のみを含む少なくとも  $3n/7$  の線が含まれるため ([14]、p218)、 $n$  個のゾーンを持つすべてのゾーン多面体には、少なくとも  $6n/7$  の平行四辺形の面があります。フェドロフの図 115 によって実際に達成される下限 ( $n = 7$ ) ([12]、p276; [8]、p32、プレート II、No. 5) の場合、この立体は、4 つの面が交わる頂点を切り捨てることによって菱形十二面体から派生するものです ([1]、p19、図 6)。

$n$  個の点が一般的な位置にある場合 (任意の 3 点が同一線上にない場合)、それらは  $\binom{n}{2}$  結合しており、ゾーン多面体のすべての面は平行多角形です ([8]、p.27)。したがって、凸多面体のすべての面が平行四辺形である場合、それらの数は  $n(n-1)$  の形式になります。最も単純な例では、 $n = 3$  : 構成は三角形であり、ゾーン多面体は 6 つの面を持つ平行六面体です。

もし  $n$  点のうち  $m$  個の点が場同一直線上にあるならば、それらの線分は  $\binom{n}{2}$  結合のうちに  $\binom{m}{2}$  回数えられることになる。

したがってゾーン多面体に関するフェドロフの公式が生まれます。

$$(n-1) n = 1 \cdot 2f_2 + 2 \cdot 3f_3 + \dots + (m-1) mf_m + \dots,$$

ここで、 $f_m$  は中心対称の  $2m$  角形のペアの数です ([12]、p277; フェドロフの  $p$  は私たちの  $n$  です)。たとえば、 $2m$  角柱は  $f_2 = m$ 、 $f_m = 1$ 、 $n = m + 1$  です。

この種の射影図では、各点はゾーン (または平行な辺のセット) を表し、 $m$  個の点を結ぶ各線は 1 対の反対側の面、つまり  $2m$  角形を表します。さらに、平行な支持面のペアと星の平行面を考慮すると、ゾーン多面体の反対側の頂点の各ペアが、連続的な変化によって相互に関連する無限のクラスの線で表

されていることがわかります。ポイントの1つを通過することなく(図4)。

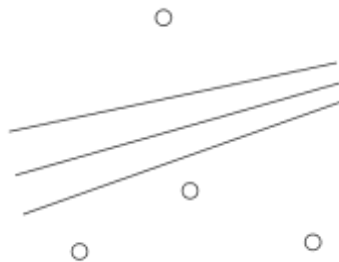


図4

すべての点を回避するすべての線は、そのような1つのクラスに属し、反対側の頂点のペアの数は、クラスの数として表示されます。(正多胞体[8]、p. 28では、これは「実射影平面の  $n$  点を線で分離できる方法の数」と表現されていました。もちろん、線は射影平面を分解しません。ただし、AとBのようにわずか2つの点でさえ、2つのセグメントABの1つが  $c$  で切断される直線  $c$  によって異なって分離されていると言えます。)

5.2 番目の投影図。-このやや厄介な線分の分割は、二重性の原則を適用することにより、おなじみの概念に変換されます(射影と位相幾何学の両方。図5を参照)。したがって、将来的には、各ゾーン多面体を、すべての交点を持つ  $n$  本の線で構成される新しい種類の投影図で表すことにします。各線はゾーンを表し、各点は中心対称の面のペアを表します。(図5)

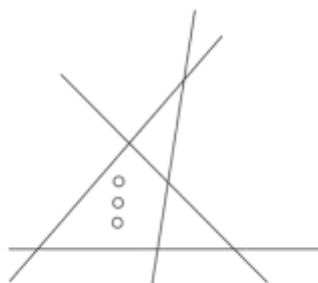
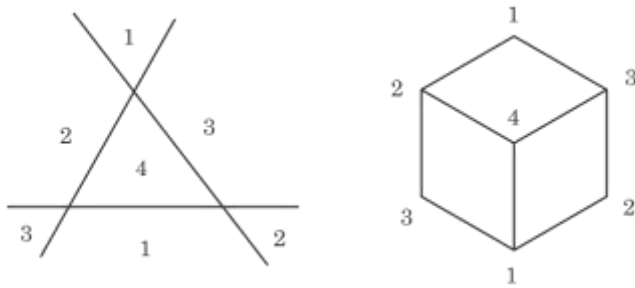


図5

$m$  本の線がポイントの1つを通過する場合、対応する面は  $2m$  角形です。線の各セグメントは、反対側の辺のペアを表し、各領域(そのようなセグメントで囲まれている)は、反対側の頂点のペアを表します。領域の辺の数は頂点の辺の数に等しく、線上の点の数はゾーン内の面の数の半分です。

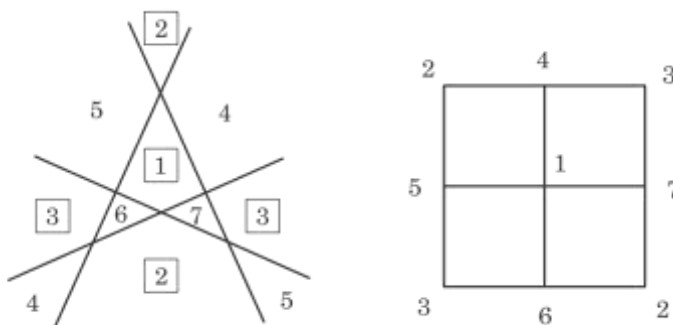
たとえば、3つの非共点は、平面を4つの三角形の領域に分解します。これらの領域は、平行六面体の反対側の頂点の4つのペアを表します。



訳者挿入図

6. 平行四辺形面からなる多面体。-ホワイト[20]は、 $n \leq 7$  について、3本が平行ではない直線の配置を調査しました。これらの配置のそれぞれは、面が  $n$  ( $n-1$ ) の平行四辺形で構成されるゾーン多面体を表します。各線は残りの  $n-1$  本の線によって  $n-1$  セグメントに分解されるため、ゾーン多面体はその  $n$  ゾーンのそれぞれに  $2(n-1)$  個の辺を持ちます。この図には  $\binom{n}{2} + 1$  の領域があり、 $n(n-1) + 2$  の頂点を表しています。

White ([20], p60-61) は、 $n = 3, 4$ 、または  $5$  の場合、 $n$  本の線のそのような配置は本質的に 1 つしかないことを観察しています。したがって、 $6, 12$ 、または  $20$  の平行四辺形で囲まれた凸多面体は、立方体、菱形十二面体および菱形二十面体の組み合わせと同形です ([12], p261; [8], p.29)。完全な四角形は 7 つの領域、つまり 4 つの三角形と 3 つの四角形を形成するため、菱形十二面体には 14 の頂点があります。3 つの面が交わる 6 つと、4 つの面が交わる 8 つの頂点です。(3つの面が交わる 8 つと 4 つの面が交わる 6 つの誤りと思われる。)



訳者挿入図

3 の四角形が 2 か所に分割されていることに注意



完全な五芒星（図 6）には 11 の領域、つまり 5 つの三角形、5 つの四角形、1 つの五角形があるため、菱形二十面体には 22 の頂点があります。3 つの面が交わる 10、4 つの面が交わる 10、5 つの面が交わる 2 です。

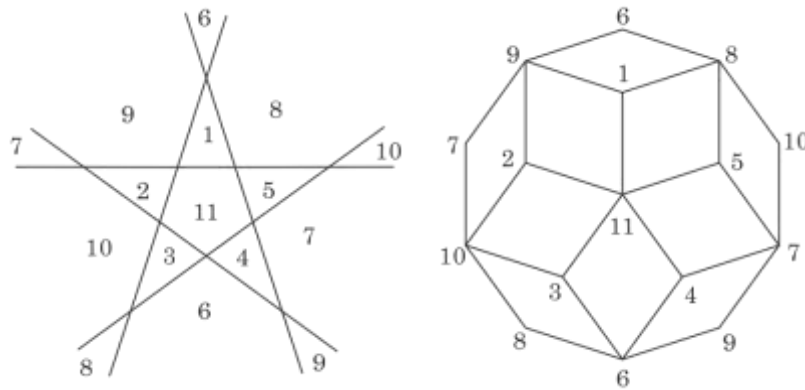


図 6

ここから、4 種類の異なる菱形からなる 30 面体（そのうちの一个是古典的な菱形 30 面体[15]です）および菱形 42 面体にいたるホワイトのさらなる調査に続きます。

菱形二十面体は、フランクリンのポーラーゾーン多面体において凸角形面で囲まれる  $n=5$  の場合です。（[8]、P29）。 $n$  が奇数の場合、そのような完全な  $n$  本の線は、正多角形の辺を延長することによってユークリッド平面に構築できます。

7. 正多角形面からなるゾーン多面体。-ユークリッド空間にある別の種類の

ゾーン多面体は、一様多面体  $t\left\{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\}$  であり、その頂点は反射によって生成さ

れた有限群  $[p, q]$  に属する特徴的な球面三角形の中心です。（[7]、p394; [8]、p.82）。

$p = 2$  の場合、 $\pi / q$  で傾斜した 2 つの反射面またはミラーが 3 番目に垂直であり、特徴的な三角形のネットワークは、赤道と  $q$  個の完全な子午線です。

ゾーン多面体  $t\left\{\begin{matrix} 2 \\ q \end{matrix}\right\}$  は  $2q$  角柱です。その他の場合、ネットワークは、正多面

体 $\{p, q\}$ の対称面にある大円によって形成されます。この円には、(たとえば)  $V$  頂点、 $E$  辺、および  $F$  枚の  $p$  角形面があります。それは次のゾーン多面体  $t\left\{\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix}\right\}$  に続きます。それは  $4E$  頂点、 $6E$  辺、 $(E + F + V)$  面： $E$  の正方形と  $F$  の  $2p$  角形及び  $V$  の  $2$  の  $q$  角形を持ちます。それぞれの大円はゾーンを生み出します。実際、射影図の線は、任意の平面または無限大の平面による対称面のセクションと見なすことができます。

例えば、 $t\left\{\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right\}$  は 6 つの正方形と 8 個の六角形からなる切頂八面体です。この場合には投影図は完全な四角形です (図 7)。その 6 辺形は正四面体 $\{3,3\}$ の対称性をもつ 6 面の部分です。

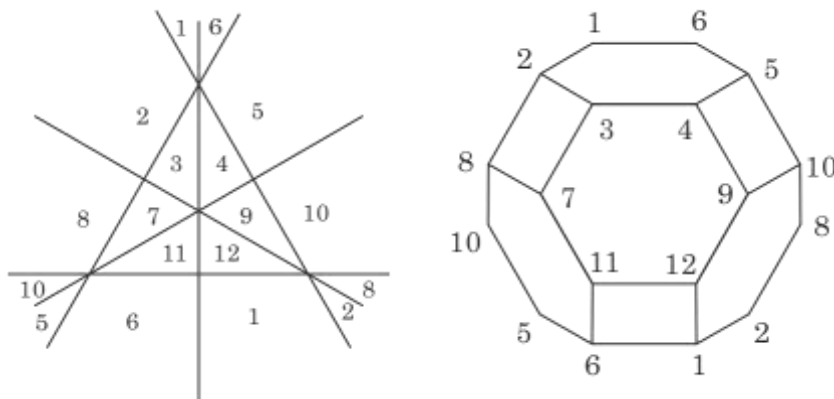


図 7

より一般的には、任意のゾーン多面体について、各ゾーンについて、中心を通る垂直面を描画し、無限大の平面による断面を考慮することによって、図の韻律バージョンを作成できます。言い換えれば、この図は結晶学者の心射方位図法にすぎません。

8.まとめ。-  $n$  個のゾーンを持つゾーン多面体には、 $n$  個の異なる方向に辺があります。一方向の辺はすべて同じ長さであり、この長さはゾーン多面体の本質的な性質を変えることなく変えることができます。より大胆には、一方向の辺はゼロまで縮小することができます。すると、 $n$ -I ゾーンしかない新

しいゾーン多面体が残ります。この図では、この手順は  $n$  線の 1 つを削除することに対応しています。

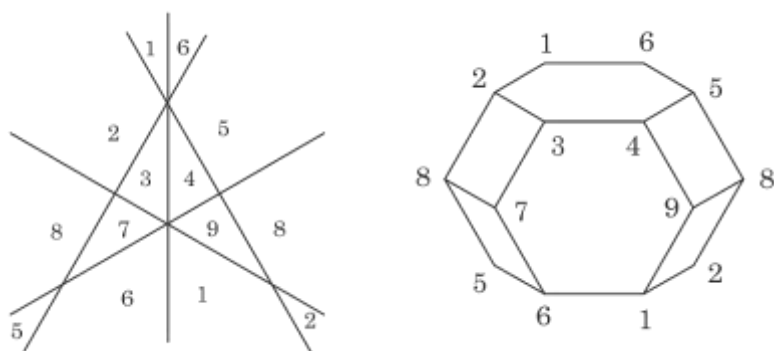
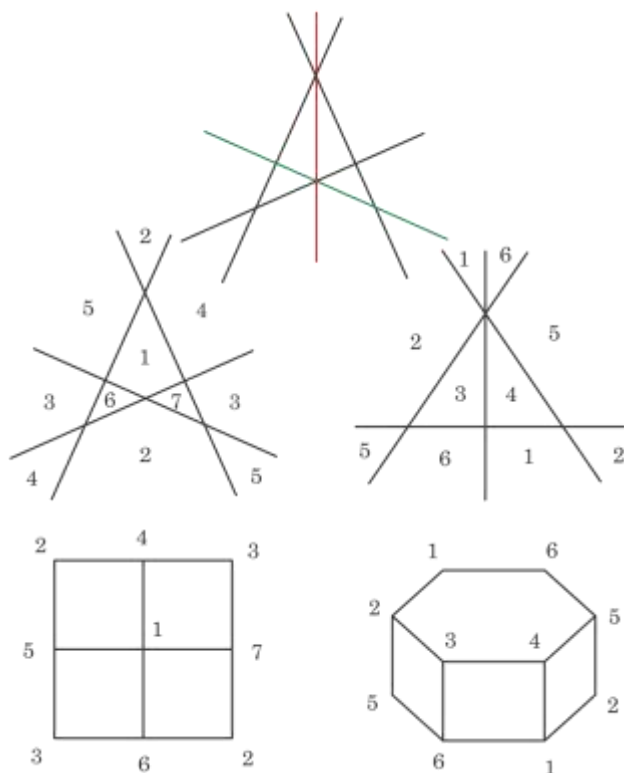


図 8

たとえば、図 7 の左半分の水平線の削除は、右側の切頂八面体のすべての垂直辺の縮小を表しています。

このようにして、2 対の反対の六角形と 1 対の反対の平行四辺形のゾーンを 2 対の反対の平行四辺形と 1 対の反対の辺に縮小します。結果は長菱形十二面体 (図 8) です。それは 8 つの平行四辺形と 6 つの六角形面からなります。



訳者挿入図

長菱形十二面体には 2 つの異なるタイプのゾーンがあり、その縮小により、それぞれ菱形十二面体と六角柱が生成されます。(菱形十二面体と長菱形十二

面体の中のこの接続は、後者がどのようにその名前を取得したかを示しています。)

平行四辺形だけからなるゾーン多面体にとっては、収縮は単にゾーンを除去することを意味します。したがって菱形三十面体の収縮は菱形二十面体であり、かつ収縮菱形二十面体は、最初にビリンスキーによって認識された新しい種類の菱形十二面体です [4]。その面はどれも同じ菱形で、三十面体と同じ形です。これは、平行六面体とおなじ対称性を持ちます。これはアフィン幾何学では通常の菱形十二面体と区別できませんが、ユークリッド空間における出現の数ということでは、等面菱形ゾーン多面体は、立方体または菱面体、通常の菱形十二面体、菱形二十面体、および菱形三十面体の4つではなく、5つです。

9. 平行多面体。 - 平行移動を繰り返すことによって重なりも隙間もなくアフィン空間全体を埋めることができる凸立体を検討してください。言い換えると、3次元の並進グループの凸状の基本領域を考慮してください。このような立体は、中心対称の多面体として証明されるでしょう。([16A] また、[15] 参照)

空間充填は、ふつうハニカムと呼ばれます。2つのセルが辺を共有するだけでなく一つの面全体を共有する場合、そのセルは平行多面体と呼ばれます ([12]、p.285)。面全体を共有することについての但し書きは不要であると推測されています。たとえば、壁のレンガのように、隣接するセルが面の一部を共有できるようにすると、新しい形状が入る余地はありません。([19]、p.155)。

平行多面体の任意の2つの反対側の面は、平行移動と中心反転によって関連付けられているため、各面は中心対称な多角形です。したがって、すべての平行多面体はゾーン多面体です。

平行多面体のハニカムでは、任意のセルの各ゾーンがセルの無限の層を決定し、すべてのセルが隣接するセルとちょうど(この)1つのゾーンの面を共

有します。すべてのエッジをゾーン方向に延長して層を十分に引き伸ばした後、適切な平面で断面を取得して、図 1 に示す種類のテッセレーションを取得できます。テッセレーションの頂点は延長されたエッジのセクションです。テッセレーションは平行四辺形または六角形で構成されているため、平行四辺形のすべてのゾーンには 4 つまたは 6 つの面が含まれます。

逆に、ゾーン多面体のすべてのゾーンに最大 6 つの面が含まれている場合、ゾーン多面体は平行多面体です。なぜなら、対応するテッセレーションの存在により、そのようなゾーン多面体を平行移動によって繰り返して完全な層を作成する可能性が保証され、そのような層をさまざまな方向に使用することで、最終的に空間全体を埋めることができます。

したがって、組み合わせ的に異なる平行多面体を列挙する問題は、各線に 2 つまたは 3 つの点が含まれるという追加条件を使用して、 $n$  本の線とそのすべての交点で構成される射影配置を列挙する問題になります。

各線には少なくとも 2 つの点が含まれている必要があるため、 $n$  は 3 未満にすることはできず、 $n = 3$  の適切な図は三角形のみです。



図 9

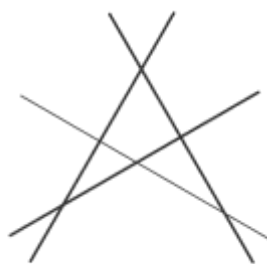


図 10

4 番目の線がある場合は、図 9 のように三角形の頂点を通過するか、図 10 のように 3 つの辺すべてを別個の点で切断します。これらは  $n = 4$  の場合の唯一の可能性です。

図 9 に 5 番目の線を追加する唯一の方法(ある線に 4 番目の点を導入せずに)は、2 本の線だけがすでに交わっている 3 つの点の 1 つを通してそれを描くことです(図 11)。同様に、完全な四辺形に追加するのに適した 5 番目の線(図 10)は対角線(図 10)のみであり、許容される 6 番目の線は別の対角

線 (図 12) のみです。これで、 $n = 5$  または  $6$  の可能性を使い果たしました。図 12 ( $n = 6$ ) は、3 つの対角点を持つ完全な四角形と見なすことができます。この構成は、それ以上線を追加できないという意味で「飽和」しています。たとえば、3 つの対角点のうちの 2 つを結ぶ線は、四角形のさらに 2 つの辺に接するため、4 つの点が含まれます。

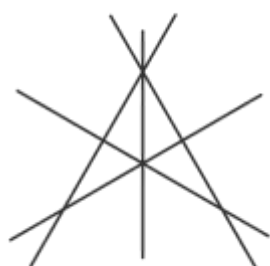


図 11

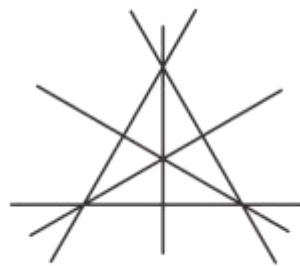


図 12

これで、平行多面体の列挙が完了しました。結果は、添付の表の最初の 3 列にまとめられています。各平行多面体は、その最も対称的なユークリッドの種類に代表されます。「立方体」の代わりに「平行六面体」と書いたかもしれませんが、一貫性を保つために、菱形十二面体は「菱形」ではなくなりました。

Table of the five parallelohedra

Diagram	n	Parallelohedron	Number of types of Voronoi polyhedra
Triangle	3	Cube	3
Triangle with a cevian	4	Hexagonal prism	3
Complete quadrilateral	4	Rhombic dodecahedron	5
Complete quadrilateral with a diagonal	5	Elongated dodecahedron	5
Complete quadrangle	6	Truncated octahedron	8

10. ボロノイ多面体。-第 2 段落では、ディリクレ格子の領域となるべき  $2m$  角形の条件を述べました。これで、3 次元への拡張の準備が整いました。ディリクレ自身はこのステップを踏むのに苦労したようには見えませんが、ボロノイは任意の次元数のユークリッド空間で働いていました。したがって、

任意の格子について、その内部が他のどの格子点よりも 1 つの格子点に近いすべての点で構成されるボロノイ多面体を定義します。

格子に属する平行移動を適用することにより、すべてのボロノイ多面体が平行多面体であることがわかります。各面は、2 つの格子点から等距離の点の軌跡の一部であるため、与えられた平行多面体は、反対側の面のペアの中心を結ぶ線がそれらの面に垂直である場合にのみ、ボロノイ多面体として使用できます。ドロネー ([10]、p.135) は、ボロノイ多面体の形状に応じて 24 種類の格子を区別します。これらの 24 の分布は、表の最後の列に示されています。たとえば、 $n = 3$  の場合の 3 つの可能性は、立方体自体、四角柱、および一般的な直方体です。また六角柱は正角柱でなければならないが、その底面は、正六角形、または外接円とちょうど 2 本の対称の垂直線をもつ六角形、あるいは、通常の 2 次元ディリクレ領域でもよい。

11.3 次元以上の空間。-上記のアイデアをより高次元のアフィンおよびユークリッド空間に拡張することは、そのような空間に、ゾーン多面体ではない平行多面体が存在することによって複雑になります。アフィン 4 次元空間でゾーン多面体を列挙することはそれほど難しいことはありません。しかし、その結果は、平行多面体（ボロノイポリトープを含む）の列挙というより重要な問題の解決に実質的な貢献をしません。

アフィン 1 空間では、ゾーン多面体を凸ポリトープとして定義します。凸ポリトープの  $k$  次元要素は中心対称です ( $k = 1, 2, \dots, l$ )。実際には、単一の値  $k = 2$  に対してこのプロパティを指定するだけで十分です。 $k = 1$  の場合は自明であり、段落 5 の冒頭の引数は  $k = 3, 4$ 、に使用できます。 $\dots, l$ 。したがって、ゾーン多面体を、2 次元の面が中心的に対称である凸ポリトープとして定義することができます。

当然のことながら、また、我々は平行多面体をアフィン空間全体を埋めるように平行移動することによって繰り返すことができる凸多面体と定義します。ここで、 $(l-2)$  次元要素を超える要素を共有する 2 つのセルは、 $(l-1)$  次元

要素全体（「面」）を共有します。

12. ゾーン多面体ではない平行多面体。 - 2次元の面が三角形である（したがって、ゾーン多面体になることはできない）4次元の平行多面体の簡単な例は、シュレーフリ記号{3,4,3}の正24胞体です（[8]、148-158ページを参照）。それはデカルト座標が偶数の整数であるユークリッド4次元空間のすべての点で構成される、格子{3, 3,4,3}のボロノイポリトープです。ミンコフスキー[16]は、これがユークリッド4次元空間で最も密度の高い球の格子パッキングの中心の格子であると認識しました。言い換えれば、最も密度の高い格子パッキングは、正ハニカム{3, 4, 3, 3}のセルの内接球によって達成されます。

3次元空間における類似格子は面心立方格子であり、そのボロノイ多面体は菱形十二面体です。

13. 平行六面体胞からなるポリトープ。 - 4次元のゾーン多面体でも、3次元のように「星」と射影図を構築できます。「2番目の」射影図は、実際の射影3次元空間での構成であり、 $n$ 個の平面（平行エッジの各ファミリに1つ）とそれらのすべての交点で構成されます。White [21]は、いずれかの点で3つ以下の平面が交わる「一般的な」ケースで、 $n \leq 7$ のこれらの構成を調査しました。点の数は $\binom{n}{3}$ であり、 $n(n-1)(n-2)/3$ の平行六面体をセルとする4次元のゾーン多面体を表す。

2つの平面の交差の各線は残りの $n-2$ の平面によって $n-2$ のセグメントに分解されるため、全部で $n(n-1)(n-2)$ のセグメントがあります。そして多胞体は $n(n-1)(n-2)$ の平行四辺形面を持ちます。

各平面は残りの $n-1$ 平面によって $\binom{n-1}{2}+1$ 領域に分解されるため、ポリトープの $n$ ゾーンのそれぞれに $n^2-3n+4$ の辺があります。構成全体に $\binom{n}{3}+\binom{n}{1}$ の立体領域があるため、ポリトープには $n(n^2-3n+8)/3$ の頂点があります。



ホワイトは、 $n = 4, 5$  または  $6$  の場合、 $n$  個の平面のそのような配置は本質的に 1 つしかないことを観察しています。したがって、(組み合わせ同型を無視して) 8、20、または 40 の平行六面体で囲まれたポリトープは 1 つだけです。

最初のケースは単に平行多胞体 (例えば、4 次元立方体  $\gamma_4$ ) ([8]、P.123)。第二は、拡張シンプレックス  $ea_4$  または  $e_3S(5)$  あるいは  $t_{0,3}\alpha_4$  の逆数に代表されるもの、そのセルは 10 個の四面体と 20 個の三角柱とからなります ([6]、P.336)。

14. ゾーン多面体である平行多面体。-パラグラフ 9 で使用した「ストレッチ」手順は、平行多面体である 4 次元のゾーン多面体が、構成のすべての線に 2 つまたは 3 つの点が含まれる図で表されることを示しています。そのような最も複雑な例構成は、一般的な位置の 5 つのポイントとそれらを 3 つに結合する 10 の平面によって形成される完全な五角形です。これらの 10 の平面は、3 次元空間を 60 の四面体領域に分解し、対応する 4 次元ゾーン多面体の 120 の頂点を表します。

射影座標  $x_1, \dots, x_5$  に関して; 合計がゼロの場合、10 個の平面を次のように取ることができます。

$$(14.1) \quad x_i = x_j; \quad (i < j),$$

その 5 つの点は

$$(-4, 1, 1, 1, 1), \dots, (1, 1, 1, 1, -4).$$

次に、60 の領域の内部点は、5 つの座標間の 60 の可能な順序の関係に対応し、反対の順序は同等と見なされます (5 つの座標すべてに同じ負の数を掛けることができるため)。言い換えれば、1 つの地域は

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5; \text{ または } x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5,$$

によって与えられます。

他の 59 の領域は、 $5x$  を並べ替えることによってこれから派生します。

パラグラフ 7 の手順に似た方法で、ユークリッド 4 次元空間の点を通る 10

個の超平面を持つ射影 3 次元空間の 10 個の平面 (14.1)、つまり通常のシンプレックスの対称の 10 個の超平面を識別できます {3、3、3}。このシンプレックスの 5 つの頂点は、上記の 5 つの点と同じ座標を持ちますが、これらはユークリッド 5 次元空間のデカルト座標と見なされ、シンプレックスは 4 次元部分空間にあります。

$$x_1 + \dots + x_5 = 0。$$

射影 3 次元空間の 60 の領域は、5 つすべてに対応する 120 の「角度」(または「円錐」) 領域を生成します。適切に選択されたこれらの 10 回の反射のうち 5 回は、通常のシンプレックスの完全な対称群を生成します。これは、次数 5 の対称群のよく知られた表現です。

角度領域内の点として

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5,$$

4 つの境界超平面から等距離

$$x_1 = x_2, x_2 = x_3, x_3 = x_4, x_4 = x_5,$$

私たちは取るかもしれません

$$(-2, -1, 0, 1, 2)。$$

5! を適用、この点までの順列により、10 方向のそれぞれに 24 個の辺つまり 10 個の超平面に垂直な方向を持つポリトープの 120 個の頂点が得られます。これは、完全な五面体で表される 4 次元のゾーン多面体-平行多面体の中で最も対称的なユークリッドの種類です。切頂八面体の 4 次元の類似物です。

このポリトープとその翻訳されたレプリカのハニカムは、ヒントンによってかなりの長さで議論されました ([13]、p.135,225)。それらは、4 次元ポリトープを次のように表した Schoute ([18]、p.59) によって n 次元に拡張されました。

$$e_1 e_2 e_3 S(5)。$$

ワイソフの構造 ([6]、p.334) の表記では、ヒントンのポリトープとハニカムはそれぞれです。



図 13

次にノードを削除して、ポリトープがハニカムのセルであり、ポリトープのソリッドセルが 2 種類 ([7]、p.394)、10 個の切頂八面体と 20 個の六角柱であることを確認します。



図 14

ハニカムの頂点は、5 つの座標が 5 を法として相互に合同でない整数である 4 空間=0 のすべての点で構成されます。セルの中心は、5 つの座標が法を法として相互に合同である同じ 4 次元空間内のすべての点です。5. Voronoi ポリトープが Hinton のポリトープであるこの格子は、Bambah [2 a]によって、ユークリッド 4 次元空間の最も薄い格子被覆における球の中心の格子であると信じられています。言い換えれば、バンバの予想によれば、最も薄い格子被覆は、ヒントンのハニカムのセルの周囲球によって達成されます。

3 次元空間の類似の格子は、体心立方格子であり、そのボロノイ多面体は切頂八面体です。この場合 [2]、最も薄い被覆は、実際にハニカムのセルの周囲の球によって達成されます。