立方体に内接する八面体*

T.BAKOS 著

次の問題は、ドーマン・ルークによって提案されました。

Math. Gazette, Vol. XLI, p. 194 (1957):

正八面体を立方体に内接し、その頂点が立方体の６つのエッジのそれぞれに１つになるようにします。

そのような八面体を４つ内接させることができます。 これら４つに共通する32面の立体は何ですか？

八面体から始めて、この方法でいくつの立方体をそれに外接させることができますか？

繰り返しますが、それらの頂点によって形成されたどのような立体がそれらすべてを包み込みますか？

立方体に内接する４つの正八面体のうちの１つの構築は次のように進行します。立方体の４つの空間対角（頂点軸）の１つを選択し、エッジの長さは $e_c = e$ です。これは八面体の４つの面軸の１つになります。 対角 DF を点 J、O、K で４つの等しい部分に分割します：DJ = JO = OK = KF、そして DF に垂直な J と K を通る平面を取ります。（図 1）。 これらは、三角形 MNP と QRS の立方体、つまり八面体の反対側の面のペアと交差するため、頂点が定義されます。次に、DM = DN ... = FS = 3e / 4、したがって $MN^2 = 9e^2/16 + 9e^2/16 = e^2/16 + e^2 + e^2/16 = MQ^2$ など。 したがって、八面

体のエッジ長の場合、$e_O = 3\sqrt{2}e_c/4$ です。

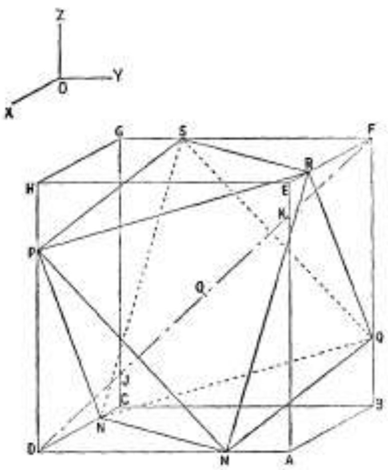

Fig. 1

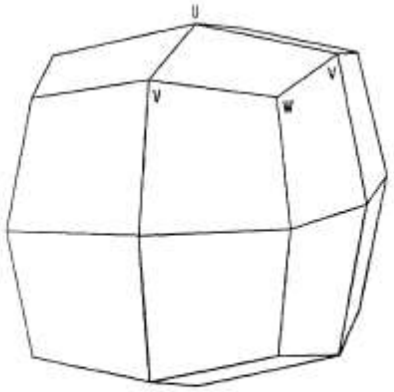

Fig. 2

立方体の各対角線には、そのような八面体が 1 つ属します。 これらの 4 つは互いに異なります。

立方体の 3 つの面軸を座標軸とし、長さの単位を選択して、D が(-2、-2、-2)、F が（2、2、2）になるようにします。 e = 4; したがって、「最初の」八面体の頂点は、M（1、-2、-2)、Q（2、2、-1）などです。4 つの八面体の 24 の頂点は、符号を変更し、（±1、±2、±2）の絶対値、および同様にそれらの 32 平面の方程式：

$\pm x \pm y \pm z = 3$、（1）

$\pm 5x \pm y \pm z = 9$。（2）

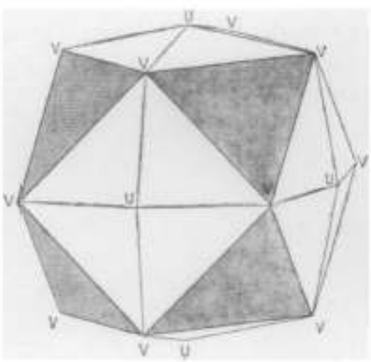

Fig. 3

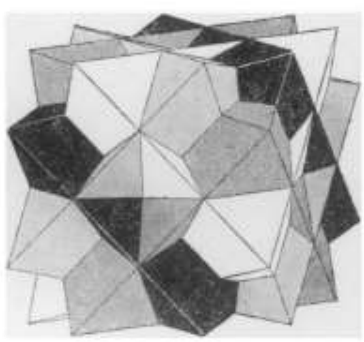

Fig. 4

タイプ（1）の 2^3 ＝ ８面のセット（図３に点描）は、頂点 T（±3,0,0）を持つ正八面体と３！／２！・23 ＝ 24 面の正八面体を定義します。 タイプ（2）は、６＋12＋８の頂点 U（±9/5, 0, 0)、V（±3/2, ±3/2, 0)、W（±7/9, ±7/9, ±7/9）（図２）を持つ凧形二十四面体を定義します。)。 共通部分は、32 個の三角形の面と６+12 個の頂点 U および V を持つ多面体です（図３)。 ４つの八面体を一緒に図４に示します。

逆に、頂点（±9、0、0）を持つ正八面体から、次のように外接する立方体に到達します。 反対側の面の 1 つのペアを選択し、それによって八面体の４つの面軸の１つを選択します。たとえば、QRS および MNP（図５）です。Q（9、0、0)、R（0、0、9）,
S（0、9、0)、M（0、-9、0)、N（0、0、-9)、P（-9、0、0）;
したがって、面軸の終点は K（3、3、3)、J（-3、-3、-3）です。
JK を JK / 2 だけ両方向に拡張し、D（-6、-6、-6)、F（6、6、6）を取得します。 FQ を QB ＝ FQ ／３だけ Q を超えて拡張し、B（10、-2、-2）などを取得します（図６を参照)。

このような４つの異なる立方体は、八面体の各面軸に１つずつ、八面体の周りに外接することができます（図 7)。

４つの立方体の８＋24＝32 頂点の座標は次のとおりです。
F（±6、±6、±6）および B（±10、±2、±2)。

タイプ B の４点の６セットは、それぞれ一辺の長さの正方形を形成します

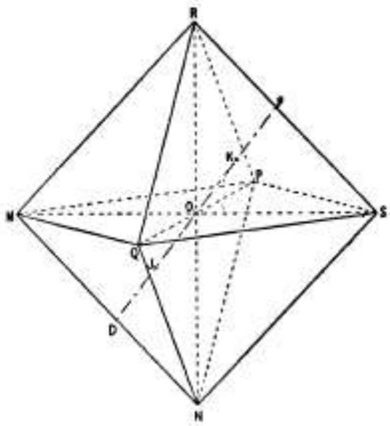

Fig. 5

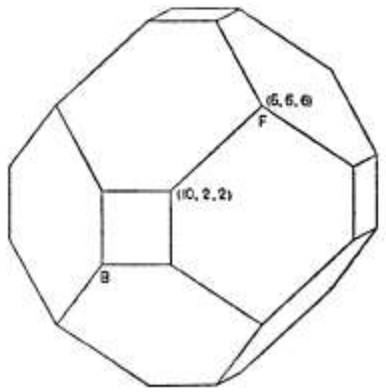

Fig. 6

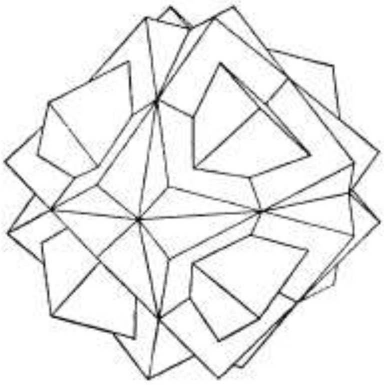

Fig. 7

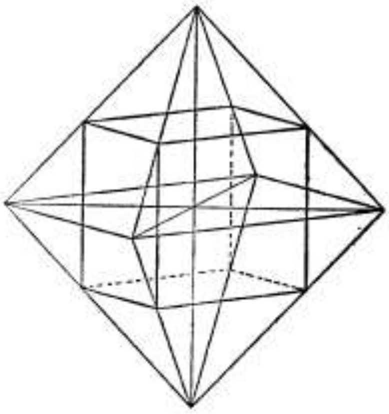

Fig. 8

4、および６点FBBFBBの12セットは、それぞれ４辺4√3と２辺４の２軸対称六角形を形成します。

立体は、菱形十二面体の４つのエッジの頂点が適切に切断されている場合に、菱形十二面体から派生させることができます。 実際、12面のタイプで囲まれた菱形十二面体

$\pm x \pm y + 0.z = 12$

タイプの６つの平面によって切り捨てられます

$\pm x + 0.y + 0.z = 10$

（立方体−菱形十二面体の組み合わせ）。

ここで、双対問題について考えてみましょう。八面体（±a、0、0）には、３つの立方体（八面体の端にある立方体の頂点）を内接することができます（図８）。 立方体の３・８ ＝ 24 頂点の座標は次のとおりです。

（±[2−√2] a、0、±[√2−1] a）、

および３・６ = 18 平面の方程式：

±x + 0.y + 0.z = [−√2−1] a（6 平面）、

±x±y + 0.z =√2[√2−1] a（12 平面）、

これも切頂菱形十二面体です。

逆に：立方体（±b、±b、±b）については、３つの通常の八面体（立方体の頂点を通る八面体のエッジ）に外接することができます。それらの頂点は次のとおりです。

（±[√2+ 1] b、0、0）（このタイプの６つの頂点）、

（±[1 + 1 /√2] b、±[1 + 1 /√2] b、o）（12 個の頂点）。

これらは、３つのエッジの頂点が「完全に切り捨てられた」凧形二十四面体の前述の U 頂点と V 頂点に対応します。 つまり、切り捨てられた平面は、切り捨てられた頂点から放射状に広がるエッジの３つの端点を通過します。