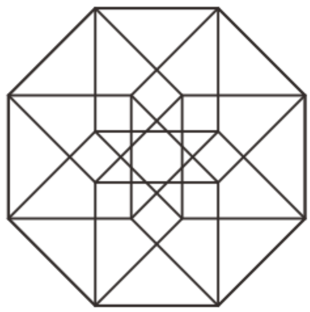
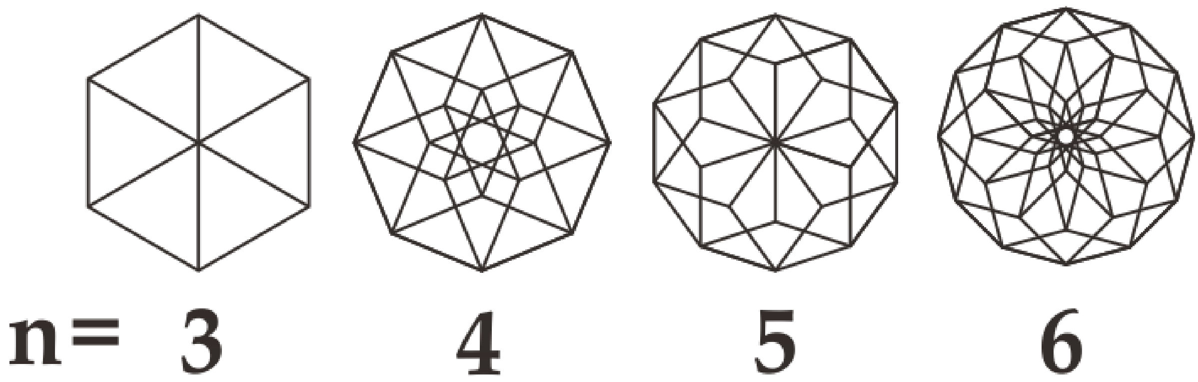
四次元の正 n-n 柱の平面への斜投影図

中川宏

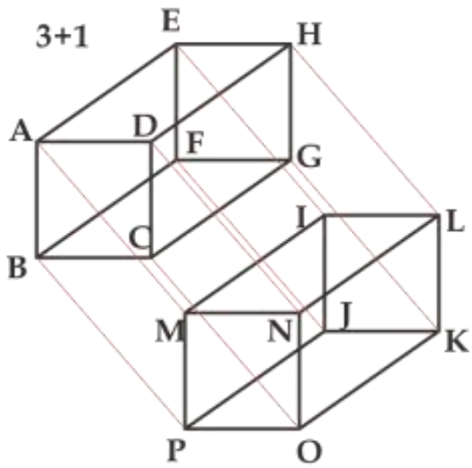


上の図は四次元の立方体の投影図としてよく知られているが、この図を正八角形の中に正方形が８つ並んでいるとみなすと、同様に正六角形の中に正三角形が６つ、正十角形の中に正五角形が１０個並んでいる図・・、つまり、正 2n 角形のなかに正 n 角形が 2n 個並んだ図が描ける。



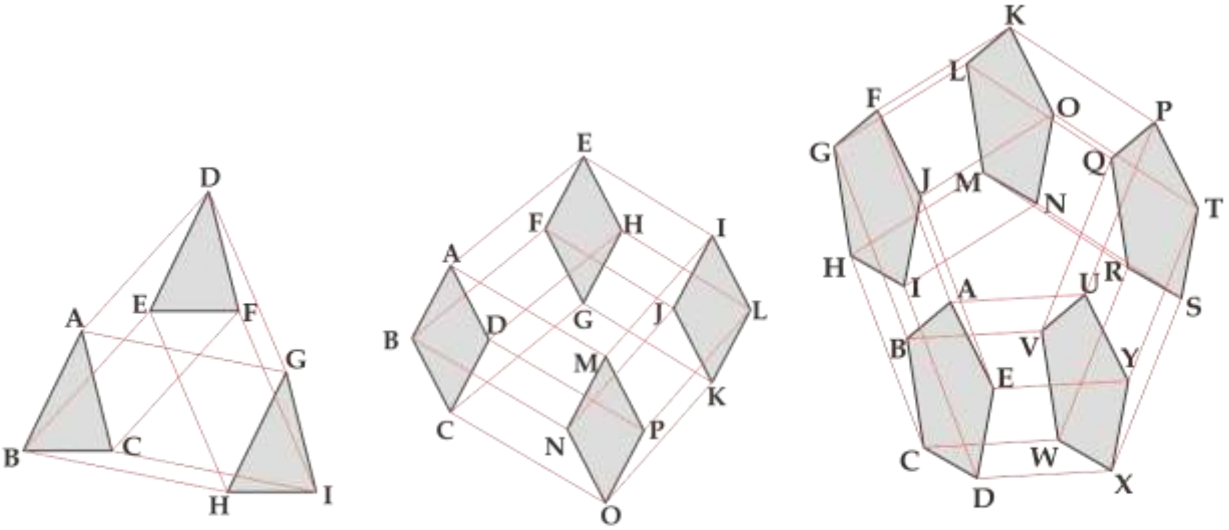
じつはこれらは、四次元の正 n-n 柱を二次元へ斜投影した図としての意義を持つ。

まず、四次元の正角柱には２種類ある。
一つは、三次元の正多角柱を別の１次元直線に沿って平行移動する 3+1 タイプ。

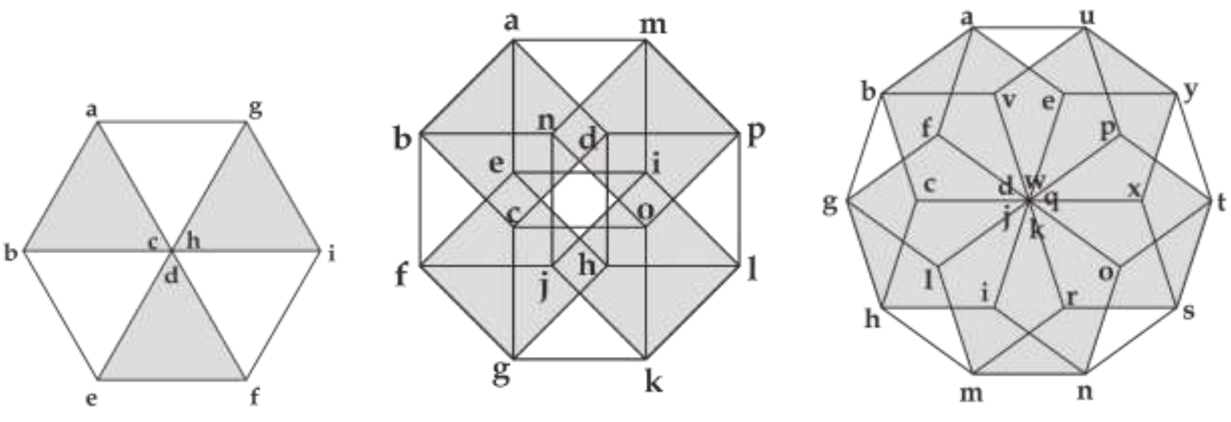


二つ目は、二次元の正多角形を別の２次元多角形に沿って平行移動する 2+2 タイプ。
今ここで取り上げるのは後者、2+2 タイプの四次元正角柱である。
このタイプを考案し針金模型を残したのは乙部融朗である（「高次元図形サイエンス」）。

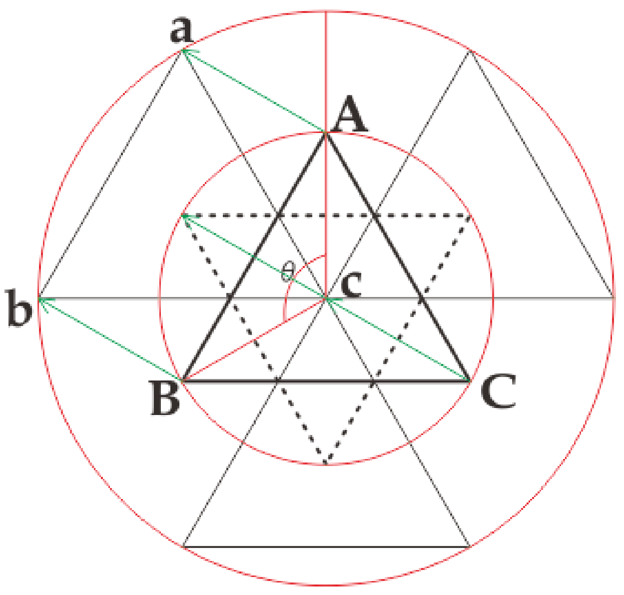
たとえば、
四次元の正３－３柱とは、二次元の正三角形を別の２次元の正三角形に沿って平行移動したものである。
四次元の正４－４柱とは、二次元の正方形を別の２次元の正方形に沿って平行移動したものである。
四次元の正５－５柱とは、二次元の正五角形を別の２次元の正五角形に沿って平行移動したものである。



これらの四次元図形をうまく平面に投影すると、以下のようになるという。



そのための座標の取り方と変換方式を「高次元図形サイエンス」の共著者・石井源久氏に教えていただいた。



たとえば上の図において、正三角形 ABC(x,y)を正三角形 abc(X,Y)に移す場合を考える。
半径１の円に内接する正三角形 ABC において、図のように反時計回りに θ とすると、頂点座標は、

$(x,y)=(-\sin\theta, \cos\theta)$; $\theta=2\pi\times\frac{k}{n}$ (k=0,1,⋯, n-1)

とあらわすことができる。

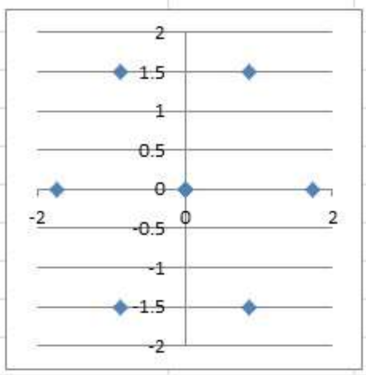
そして移動の操作は、正三角形 ABC を $\frac{\theta}{2}$ 回転させた点線表示の正三角形の頂点座標

$(z,u)=(-\sin\theta, \cos\theta)$; $\theta=2\pi\times\frac{2k+1}{2n}$ (k=0,1,⋯, n-1)

を足し合わせることを意味する。
つまり、変換操作は、
X=x+z
Y=y+u
となる。

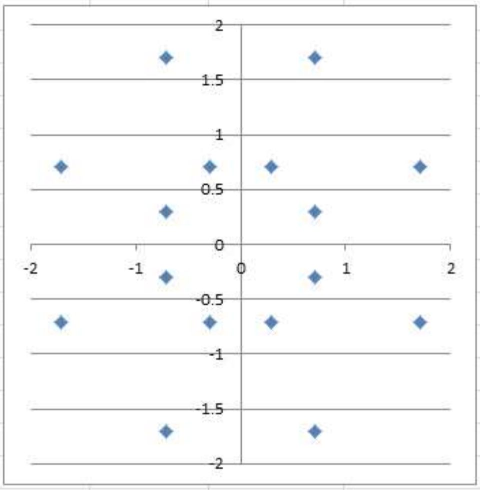
確認してみよう。
四次元の正３－３柱のばあい

正3－3柱	x	y	z	u	斜投影	X=x+z	Y=y+u
A	0	1	-0.866	0.5	a	-0.866	1.5
B	-0.866	-0.5	-0.866	0.5	b	-1.732	0
C	0.866	-0.5	-0.866	0.5	c	0	0
D	0	1	0	-1	d	0	0
E	-0.866	-0.5	0	-1	e	-0.866	-1.5
F	0.866	-0.5	0	-1	f	0.866	-1.5
G	0	1	0.866	0.5	g	0.866	1.5
H	-0.866	-0.5	0.866	0.5	h	0	0
I	0.866	-0.5	0.866	0.5	i	1.732	0



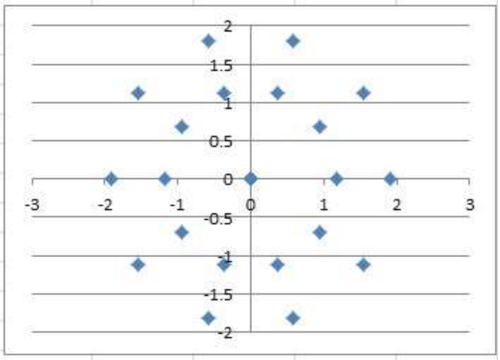
四次元の正４－４柱のばあい

正4-4柱	x	y	z	u	斜投影	X=x+z	Y=y+u
A	0	1	−0.707	0.707	a	−0.707	1.707
B	−1	0	−0.707	0.707	b	−1.707	0.707
C	0	−1	−0.707	0.707	c	−0.707	−0.293
D	1	0	−0.707	0.707	d	0.293	0.707
E	0	1	−0.707	−0.707	e	−0.707	0.293
F	−1	0	−0.707	−0.707	f	−1.707	−0.707
G	0	−1	−0.707	−0.707	g	−0.707	−1.707
H	1	0	−0.707	−0.707	h	0.293	−0.707
I	0	1	0.707	−0.707	i	0.707	0.293
J	−1	0	0.707	−0.707	j	−0.293	−0.707
K	0	−1	0.707	−0.707	k	0.707	−1.707
L	1	0	0.707	−0.707	l	1.707	−0.707
M	0	1	0.707	0.707	m	0.707	1.707
N	−1	0	0.707	0.707	n	−0.293	0.707
O	0	−1	0.707	0.707	o	0.707	−0.293
P	1	0	0.707	0.707	p	1.707	0.707



四次元の正５－５柱のばあい

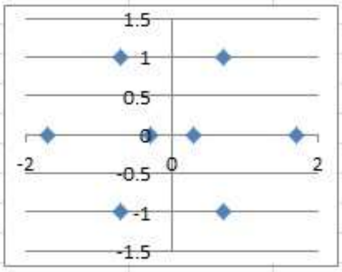
正5-5柱	x	y	z	u	斜投影	X=x+z	Y=y+u
A	0	1	−0.588	0.809	a	−0.588	1.809
B	−0.951	0.309	−0.588	0.809	b	−1.539	1.118
C	−0.588	−0.809	−0.588	0.809	c	−1.176	0
D	0.588	−0.809	−0.588	0.809	d	0	0
E	0.951	0.309	−0.588	0.809	e	0.363	1.118
F	0	1	−0.951	−0.309	f	−0.951	0.691
G	−0.951	0.309	−0.951	−0.309	g	−1.902	0
H	−0.588	−0.809	−0.951	−0.309	h	−1.539	−1.118
I	0.588	−0.809	−0.951	−0.309	i	−0.363	−1.118
J	0.951	0.309	−0.951	−0.309	j	0	0
K	0	1	0	−1	k	0	0
L	−0.951	0.309	0	−1	l	−0.951	−0.691
M	−0.588	−0.809	0	−1	m	−0.588	−1.809
N	0.588	−0.809	0	−1	n	0.588	−1.809
O	0.951	0.309	0	−1	o	0.951	−0.691
P	0	1	0.951	−0.309	p	0.951	0.691
Q	−0.951	0.309	0.951	−0.309	q	0	0
R	−0.588	−0.809	0.951	−0.309	r	0.363	−1.118
S	0.588	−0.809	0.951	−0.309	s	1.539	−1.118
T	0.951	0.309	0.951	−0.309	t	1.902	0
U	0	1	0.588	0.809	u	0.588	1.809
V	−0.951	0.309	0.588	0.809	v	−0.363	1.118
W	−0.588	−0.809	0.588	0.809	w	0	0
X	0.588	−0.809	0.588	0.809	x	1.176	0
Y	0.951	0.309	0.588	0.809	y	1.539	1.118



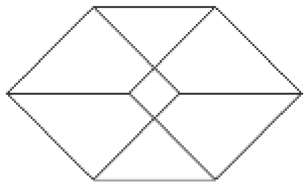
エクセルでは頂点の位置しか確認できないが、各頂点を結ぶ辺の移動も間違いないことが確認できている。

このばあいの、四次元の(x,y,z,u)座標を二次元の(x+z,y+u)座標に変換する操作は、斜投影の一種といえるそうである。
試しに同じ操作を三次元の立方体に行ってみると、

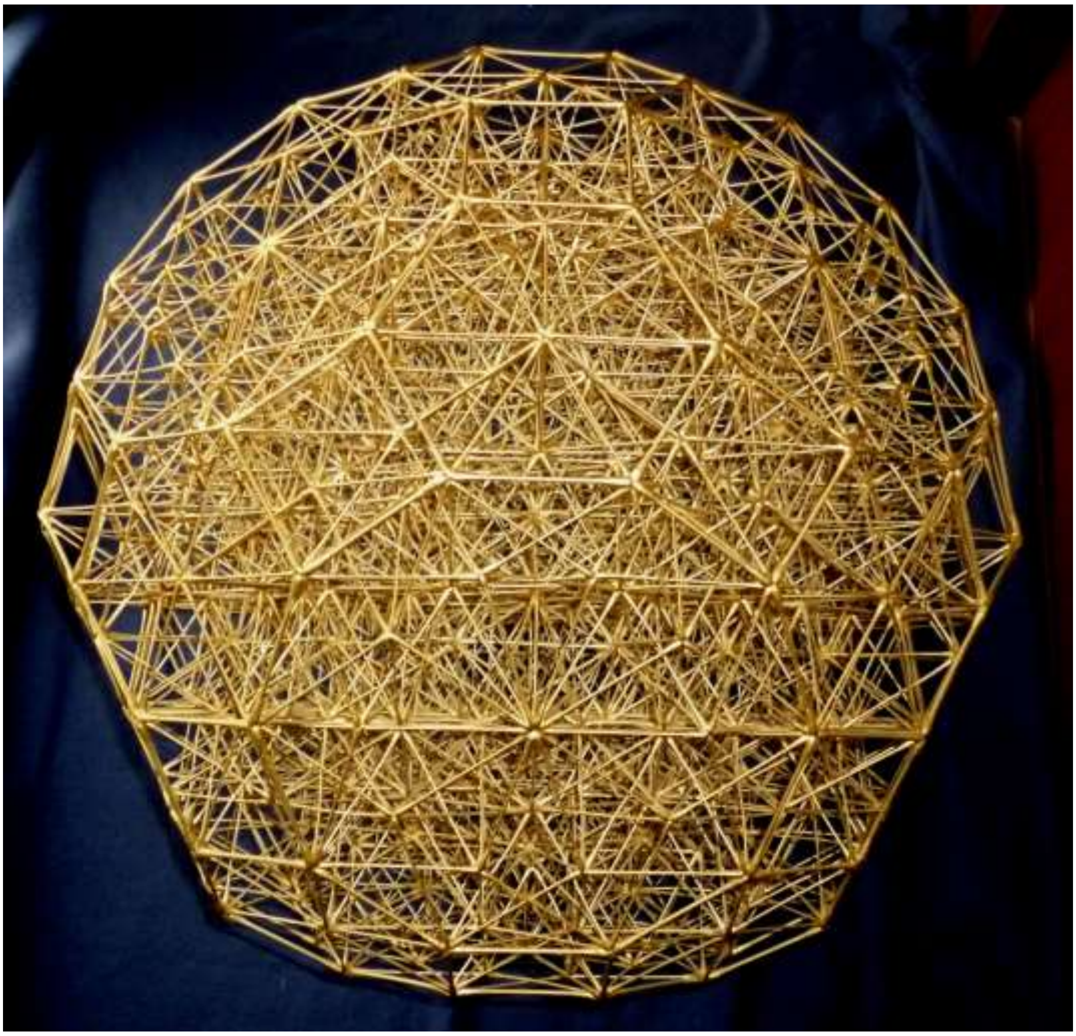
立方体	x	y	z	u	斜投影	X=x+z	Y=y+u
A	0	1	−0.707		a	−0.707	1
B	−1	0	−0.707		b	−1.707	0
C	0	−1	−0.707		c	−0.707	−1
D	1	0	−0.707		d	0.293	0
E	0	1	0.707		e	0.707	1
F	−1	0	0.707		f	−0.293	0
G	0	−1	0.707		g	0.707	−1
H	1	0	0.707		h	1.707	0



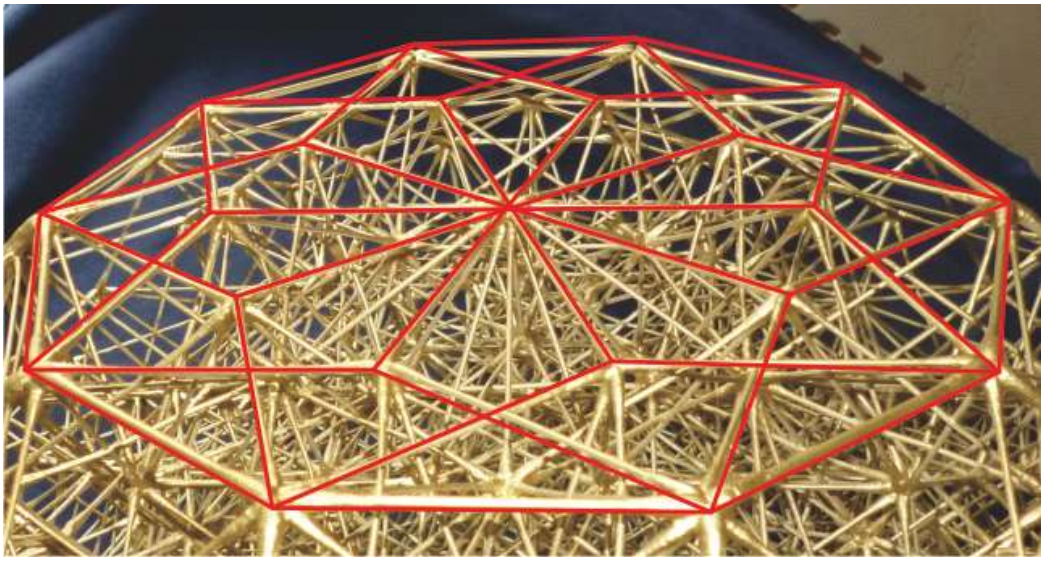
となり、長い平行六角形のなかに正方形が２つ入った図になって、斜投影であることがわかる。



さいごに以上の考察のきっかけとなった山本裕一氏の綿棒多面体・大菱形 20・12 面体を紹介する。



数千本の同じ長さの綿棒からなるこの精緻な模型の表面の正十角形を拡大する。



さて、この形はいったい何だろうというのが出発点である。
山本氏が綿棒模型の構造強化を目指して同じ長さの綿棒だけを追加して美しい形を追い求めた結果、図らずも四次元図形の投影図となったのだといえよう。