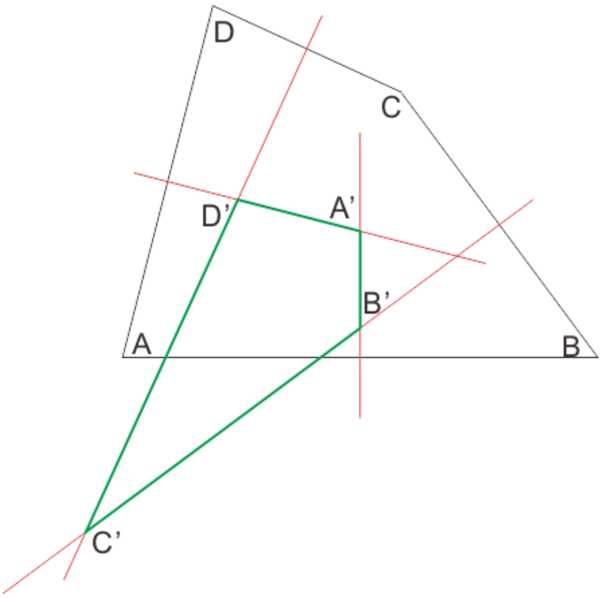
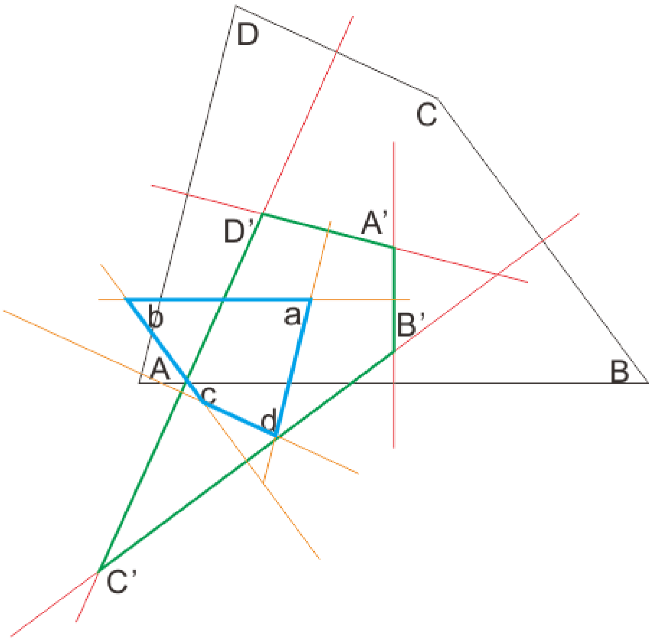
四角形の外心系相似

山﨑憲久

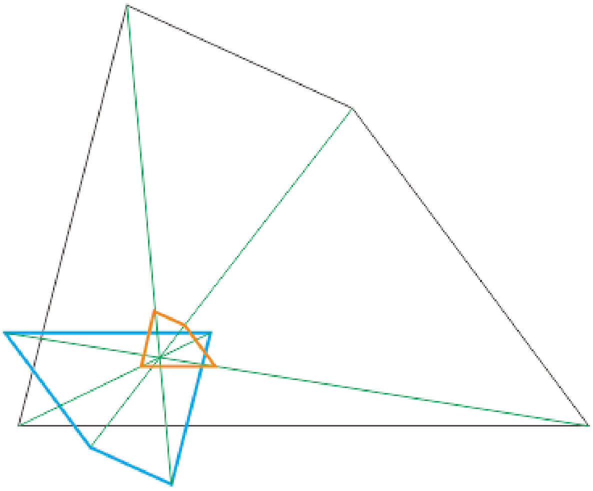
任意の四角形 ABCD の隣り合う辺の垂直二等分線の交点を頂点とする四角形を A'B'C'D' とする。

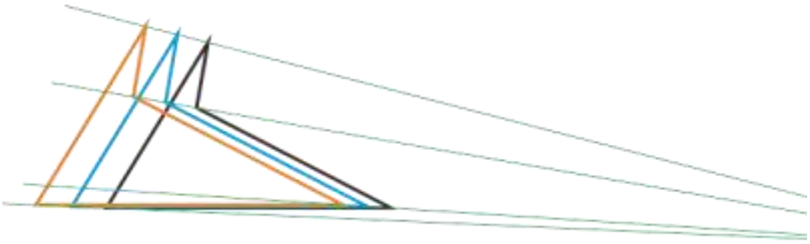


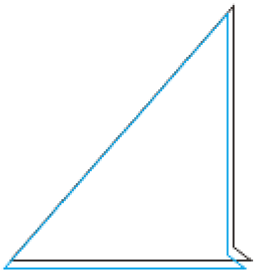
再び四角形 A'B'C'D'の隣り合う辺の垂直二等分線の交点を頂点とする四角形を abcd とすると、四角形 abcd は、四角形 ABCD と相似である。



この操作は無限に繰り返すことができ、相似の四角形の相似中心は不動である。

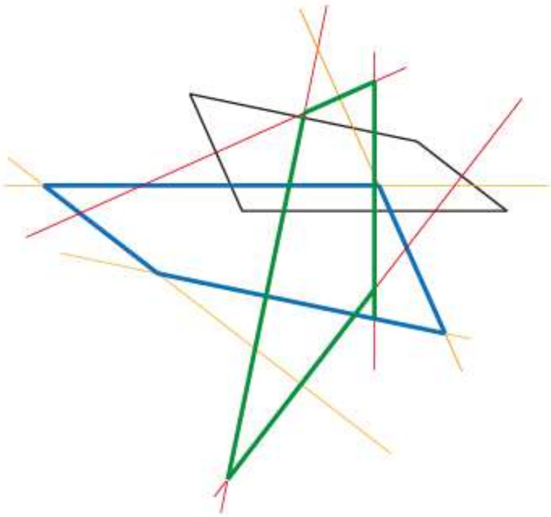


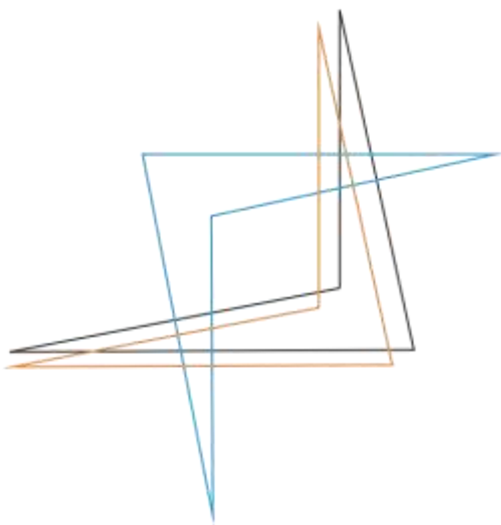




相似の証明と相似比の計算はできていない。
相似比は四角形が凸の場合は１より大,
凹の場合は１より小と予想される。
相似比が１に近づくのは、直角二等辺
三角形に近い凹四角形のようである。

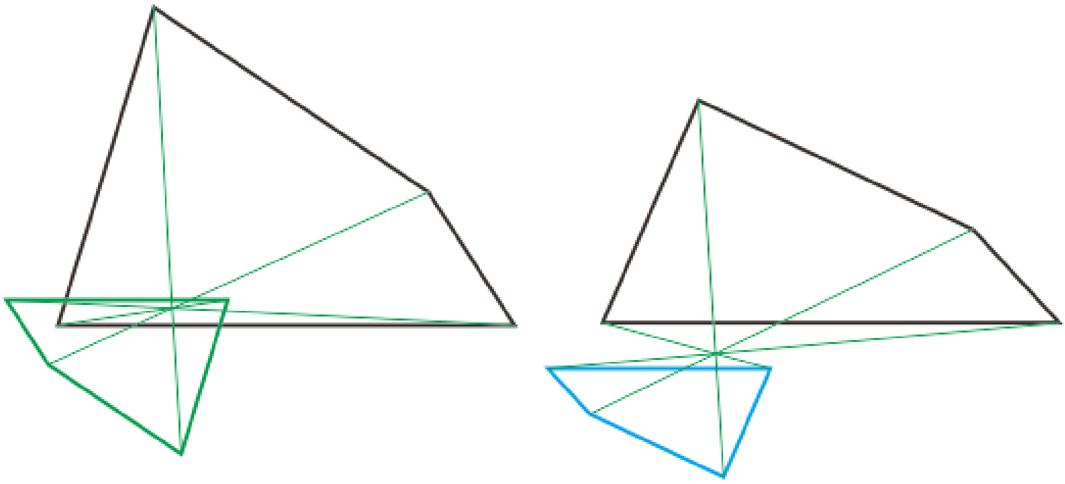
ここで、五輪先生から凸四角形でも相似比が１より大の例(下左図)が示された。



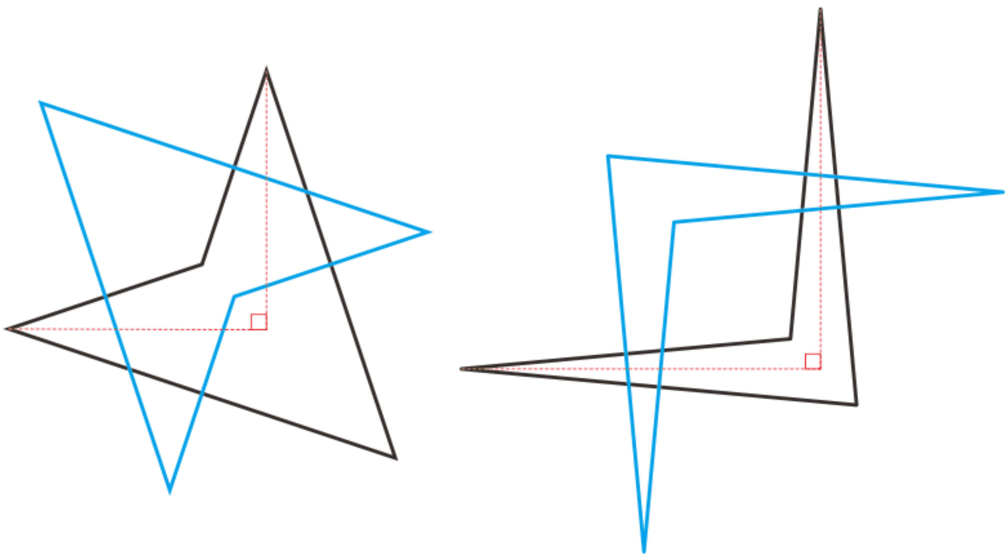


逆に、凹四角形で相似比が１より小となる例があるかどうか探してみると、これまた見つかった(上右図)。この場合も相似比は１に近い。
したがって、相似比は四角形の凹凸には依らないことがわかった。

また、相似の中心が四角形の中にあるか外にあるかも、四角形の凹凸には依らない。

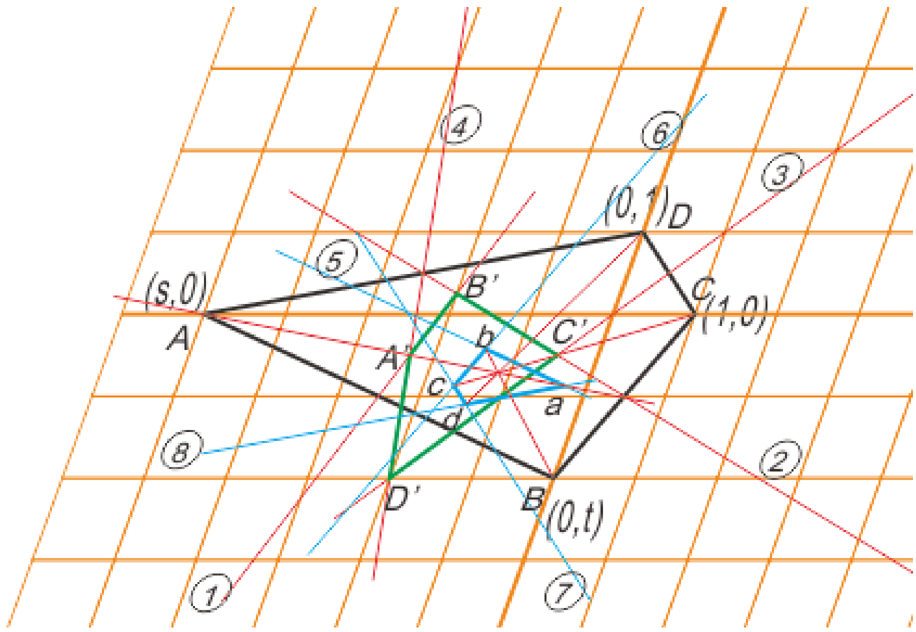


試行錯誤の末、相似比＝１の四角形のタイプが見つかった。
それは左右対称の矢じり形で、返しの部分の内角の二等分線が直交するという特徴を持つ。
この場合の相似中心は無限遠ということになる。



相似の証明

座標計算があまりに煩雑なため、四角形 ABCD の２本の対角線を座標軸とし、対角線の交点から頂点 C,D までの長さを単位長とする斜交座標を設定して計算することにする。この方法では任意の四角形 ABCD と四角形 abcd との一般的な相似比を求めることはできないが、すくなくとも相似であることの証明はできると考えた。



計算は斜交座標を直交座標に変換して行った。過程は省略して、結果を一覧にする。
任意の四角形 ABCD の座標
A(s,0)
B(0,t)
C(1,0)
D(0,1)

四辺の垂直二等分線

直線① $y=\frac{s}{t}x-\frac{s^2}{2t}+\frac{t}{2}$

直線② $y=\frac{1}{t}x-\frac{1}{2t}+\frac{t}{2}$

直線③ $y=x$

直線④ $y=sx-\frac{s^2-1}{2}$

四角形 A'B'C'D'の座標

A'$\left(\frac{s^2+t}{2s}, \frac{t+1}{2}\right)$

B'$\left(\frac{s+1}{2}, \frac{t^2+s}{2t}\right)$

C'$\left(\frac{t+1}{2}, \frac{t+1}{2}\right)$

D'$\left(\frac{s+1}{2}, \frac{s+1}{2}\right)$

四辺の垂直二等分線

直線⑤ $y=-\frac{t}{s}x+\frac{2s^2t+st+t^2}{4s^2}+\frac{2t^2+s+t}{4t}$

直線⑥ $y=-tx+\frac{st+2t+t^2}{4}+\frac{2t^2+s+t}{4t}$

直線⑦ $y=-x+\frac{2+s+t}{2}$

直線⑧ $y=-\frac{1}{s}x+\frac{2s^2+s+t}{4s^2}+\frac{2+s+t}{4}$

四角形 abcd の座標

$a\left(\frac{t^2+3s^2t+st-s^3}{4st},\frac{(s+t)(t+1)}{4t}\right)$

$b\left(\frac{(s+t)(s+1)}{4s},\frac{s^2+3st^2+st-t^3}{4st}\right)$

$c\left(\frac{t^2+3t+st-s}{4t},\frac{(s+t)(t+1)}{4t}\right)$

$d\left(\frac{(s+t)(s+1)}{4s},\frac{s^2+3s+st-t}{4s}\right)$

四角形 abcd の対角線

ac $y=\frac{(s+t)(t+1)}{4t}$

bd $x=\frac{(s+t)(s+1)}{4s}$

四角形 abcd の対角線の交点 Q

$Q\left(\frac{(s+t)(s+1)}{4s},\frac{(s+t)(t+1)}{4t}\right)$

Q による対角線の内分比

$\frac{Qa}{cQ}=-s$

$\frac{Qb}{dQ}=-t$

これは四角形 ABCD の対角線の交点による内分比と等しい。
また、垂直二等分操作の繰り返しにより、
⑤ // AB, ⑥ // BC, ⑦ // CD, ⑧ // DA
なので、四角形ＡＢＣＤの内角と対応する四角形 abcd の内角は等しい。
よって、四角形 ABCD と四角形 abcd は相似である。

四角形 ABCD と四角形 abcd の対応する頂点を結ぶ直線

Aa　$y = \frac{s(t+1)}{(t-s^2)}(x-s)$

Bb　$y = \frac{s-t^2}{t(s+1)}x + t$

Cc　$y = \frac{(t+1)}{(t-1)}(x-1)$

Dd　$y = \frac{(s-1)}{(s+1)}x + 1$

これら４つの直線は１点で交わり、その座標は、

$P\left(\frac{t(s+1)}{s+t}, \frac{s(t+1)}{s+t}\right)$

である。この点 P が四角形 ABCD と四角形 abcd の相似の中心に他ならない。

ちなみに、この場合の相似比は

$$\frac{(s-t)^2}{4st}$$

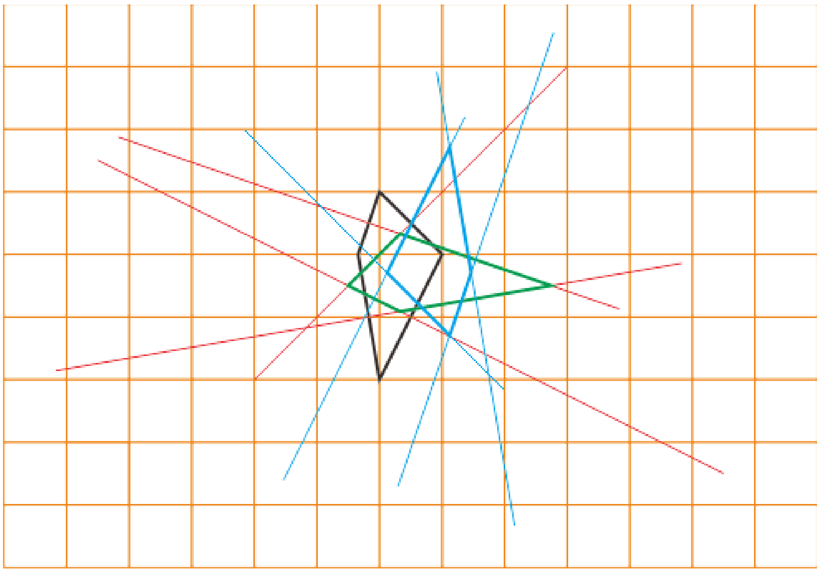
となる。

試しに、

ｔ＝ー２とした場合に相似比が１となるｓは、

$s = \frac{-12 \pm \sqrt{128}}{2}$

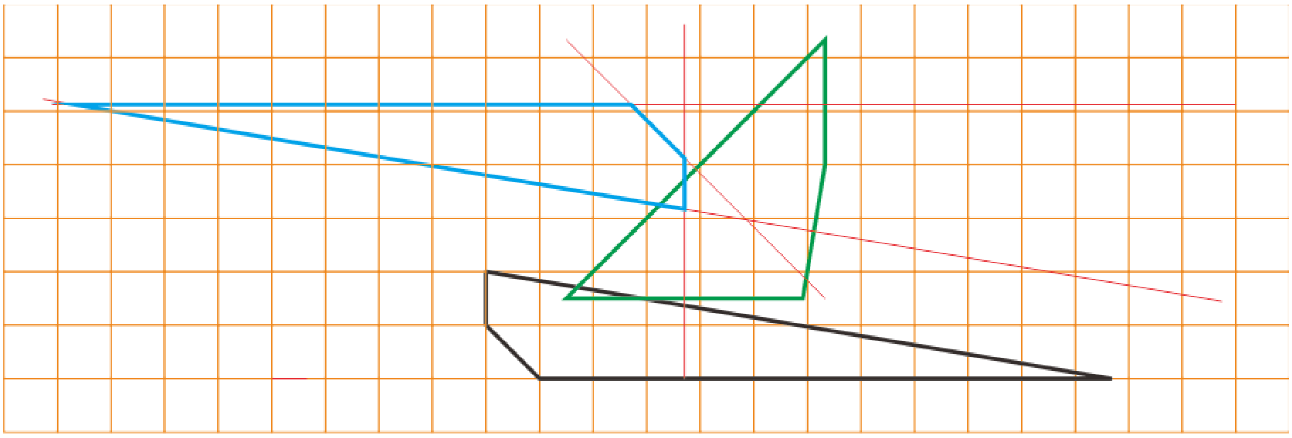
と求められる。下図にその一例を示す。



また、対角線が直交しない場合の先の相似比の活用を試してみた。t=2 とした場合に相似比が１となるｓは、

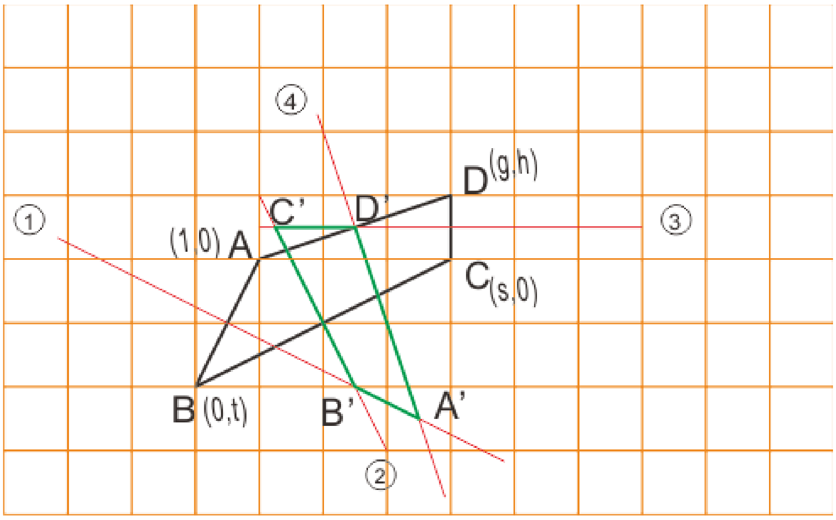
$$s = \frac{12 \pm \sqrt{128}}{2}$$

となり、対角線ではなく、一組の対辺が直交する場合になるが、以下のようにこれも相似比１である。



したがって、相似比が１となる場合は無数にあると言える。つまり、先に見たやじり形の例は、四角形 ABCD の四辺の垂直二等分線の交点からなる四角形 A'B'C'D'が ABCD と合同になる例だととらえなおすことができる。

そこで、四角形 A'B'C'D'が四角形 ABCD と合同になる条件を確かめるために、一般的な座標におき直してみる。



A(1,0)
B(0,t)
C(s,0)
D(g,h)
とすると、
四辺の垂直二等分線

直線①　$y=\frac{1}{t}x-\frac{1}{2t}+\frac{t}{2}$

直線②　$y=\frac{s}{t}x-\frac{s^2}{2t}+\frac{t}{2}$

直線③　$y=\frac{s-g}{h}x+\frac{g^2-s^2}{2h}+\frac{h}{2}$

直線④　$y=\frac{1-g}{h}x-\frac{g^2-1}{2h}+\frac{h}{2}$

四角形 A'B'C'D'の座標

A'$\left(\frac{g^2t-t+h+h^2t-ht^2}{2(gt+h-t)}, \frac{g^2+h^2+gt^2-t^2-g}{2(gt+h-t)}\right)$

B'$\left(\frac{s+1}{2}, \frac{t^2+s}{2t}\right)$

C'$\left(\frac{g^2t+h^2t-s^2t+hs^2-ht^2}{2(hs+gt-st)}, \frac{g^2s+h^2s-gs^2+gt^2-st^2}{2(hs+gt-st)}\right)$

D'$\left(\frac{s+1}{2}, \frac{s-gs-g+g^2+h^2}{2h}\right)$

対応する２頂点を通る直線の傾きは、

AA'　$\frac{g^2+h^2+gt^2t-t^2-g}{g^2t+t-h+h^2t-ht^2-2gt}$

BB'　$\frac{s-t^2}{t(s+1)}$

CC'　$\frac{g^2s+h^2s-gs^2+gt^2-st^2}{g^2t+h^2t+s^2t-hs^2-ht^2-2gst}$

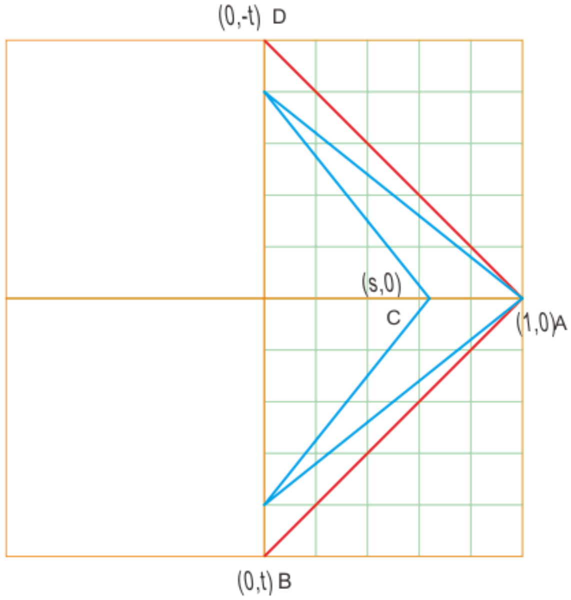
DD'　$\frac{s-gs-g+g^2-h^2}{h(s+1-2g)}$

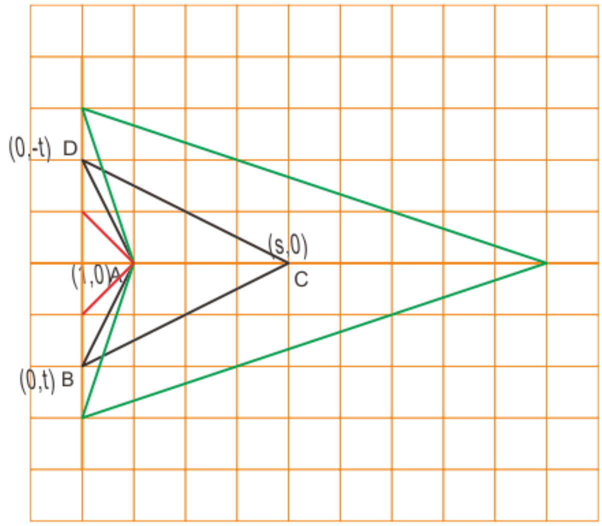
これらがすべて平行になる、つまり一致することが条件である。
まず BB'と DD'を見比べて$g=0$ でなければならないことがわかる。つまり、

$$\frac{s-t^2}{t(s+1)}=\frac{s-h^2}{h(s+1)}$$

$h=t$ であれば等式は成り立つがそれでは四角形にならないので除外すると、それぞれの分子が＝０の場合のみ成り立つことがわかる。$s=t^2=h^2$ から、$h=-t$ となる。
下図右に　$|t|>1$の場合、左にその赤線付近を拡大して　$|t|<1$ の場合を示す。

$s = t^2 = h^2>1$ であるから、凧形にはならず、矢じり形であることもわかる。





この矢じり形の特徴は、BA の傾きが $-\mathrm{t}$ 、BC の傾きは $\dfrac{-1}{t}$ であることから、返し部分 B,D の内角の二等分線の傾きが±1 であり、それらが直交することも確かめられた。

座標係数の一般化

四角形 ABCD の２本の対角線を座標軸とし、対角線の交点から頂点 C,D までの長さを単位長とする斜交座標を設定することによって
相似中心の座標値

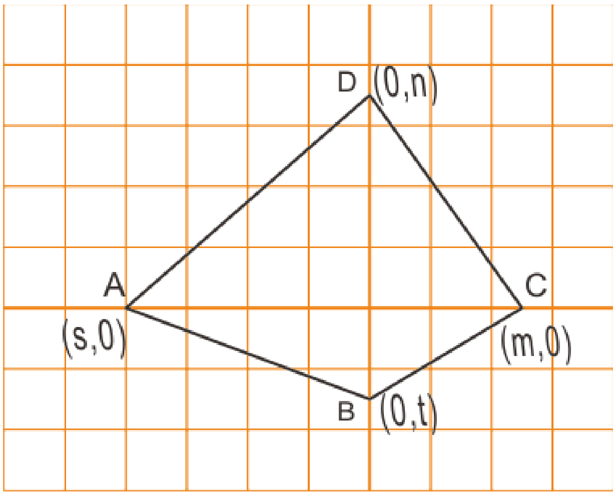
$$P\left(\frac{t(s+1)}{s+t},\ \frac{s(t+1)}{s+t}\right)$$

相似比

$$\frac{(s-t)^2}{4st}$$

を得た。

この結果をもとに、以下のように座標係数を復元することを試みた。



パラメータの対称性に留意しつつ、複数の値を代入して作図を繰り返すことによって、
相似中心は、

$$P\left(\frac{tn(s+m)}{sm+tn},\ \frac{sm(t+n)}{sm+tn}\right)$$

相似比は、

$$\left|\frac{(sm-tn)^2}{4stmn}\right|$$

と推定できた。

これらの値が妥当するのは、対角線が直交する四角形または、右のように向かい合う一組の辺が直交する四角形に限られる。いずれも４つの頂点を直交座標軸上に取ることができるという特徴を持つ。