四角形の定点系相似

山﨑憲久

五輪先生から

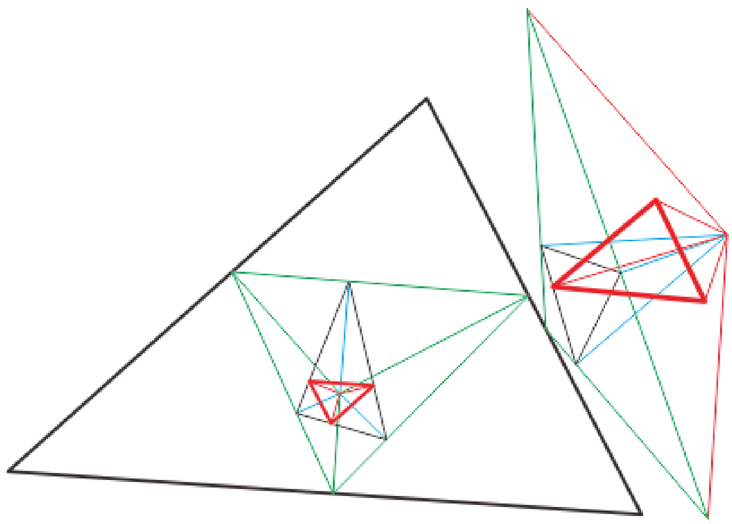
垂線といえば、三角形 ABC の各辺に同一平面上の点 P（ただし辺上や外接円周上にない）から垂線を引き、その足で作られる三角形を A'B'C'とします。

この操作を繰り返すと、ABC に相似な三角形が現れるそうです。

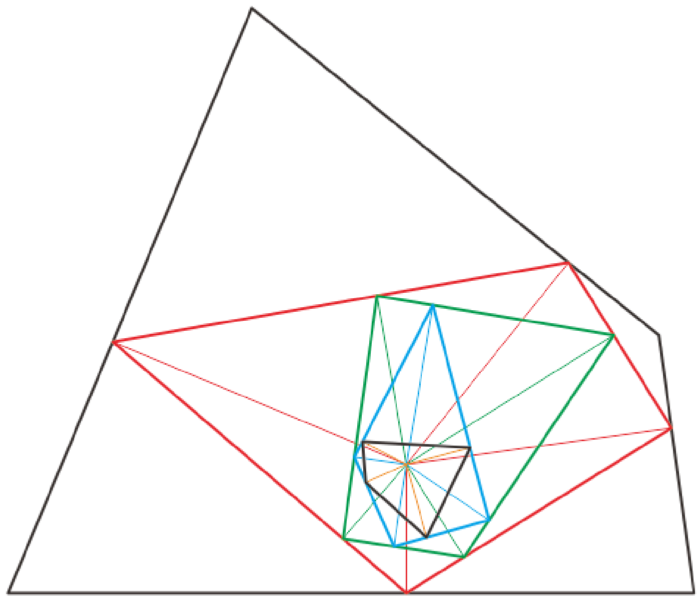
また、この事実を多角形に拡張した人がいます。

と教えていただいた。（出典は、「幾何学入門」コクセター著）

早速試してみた。

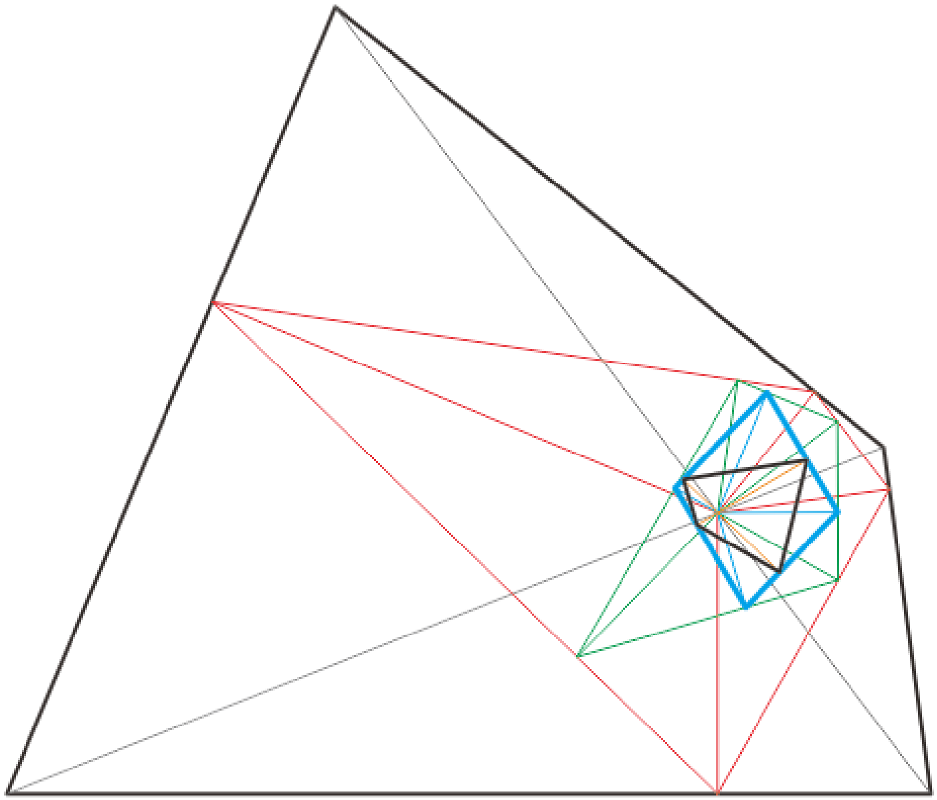


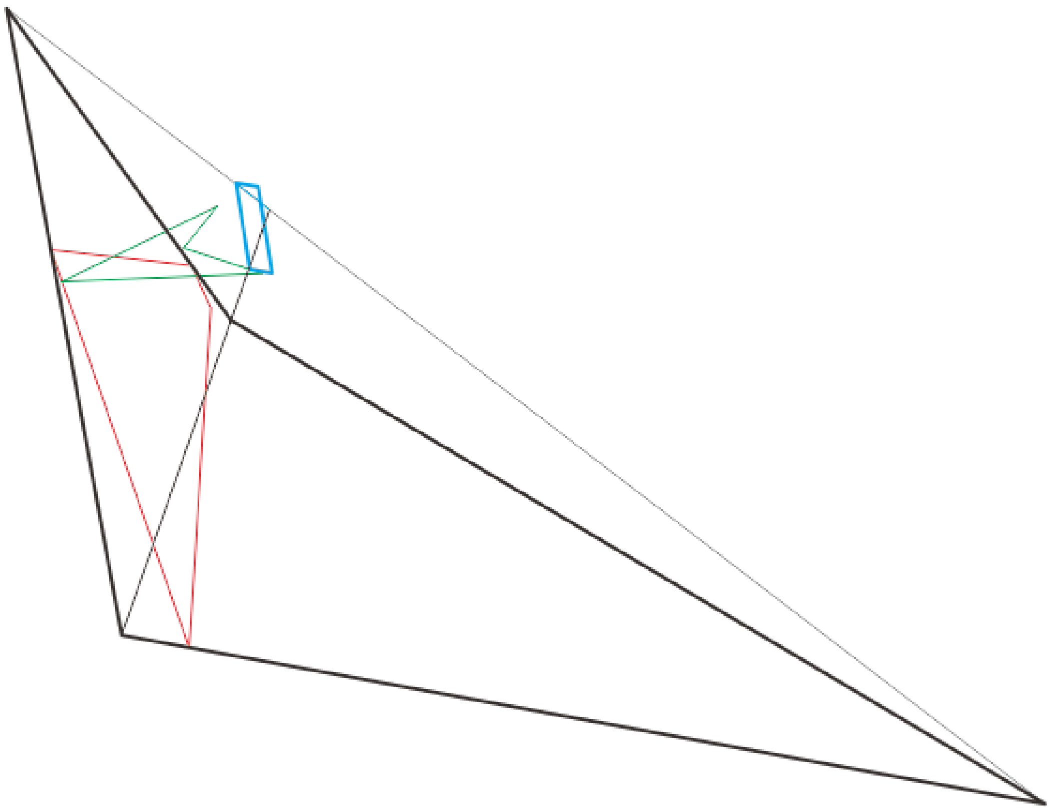
たしかに３回繰り返すと相似図形が現れた。ということは四角形の場合は４回だろうか。

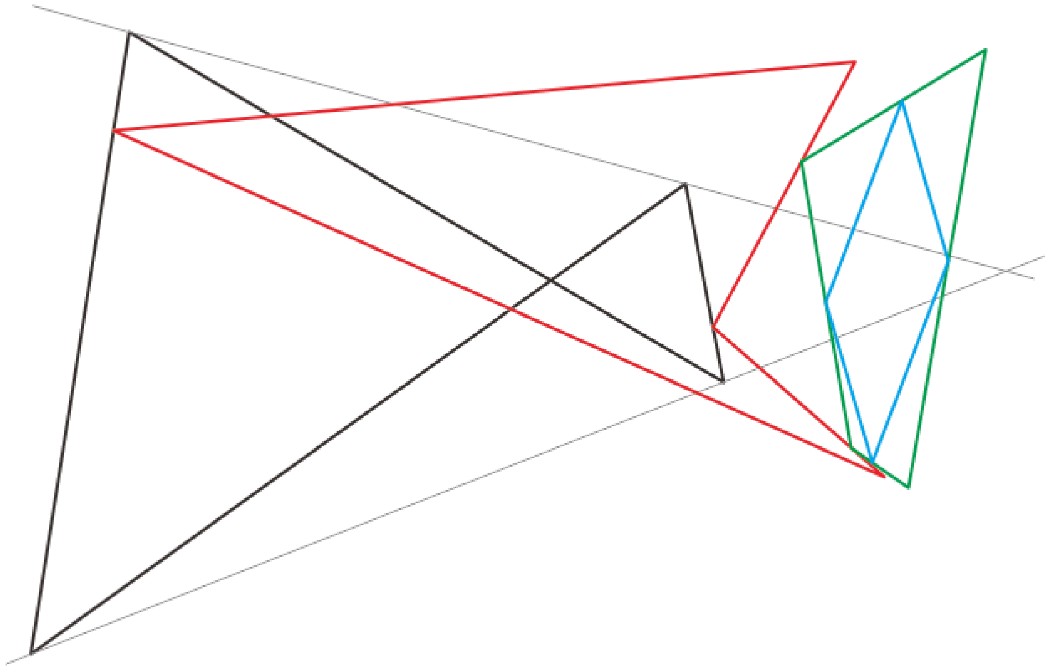


予想通り４回繰り返すと相似の四角形が現れた。この操作の始点は辺上や外接円周上以外

のどこでもよいとされているが、四角形の対角線の交点とするとどうなるか試してみた。
すると驚いたことに、４回目で相似図形が現れる前の３回目に平行四辺形が現れることがわかった。



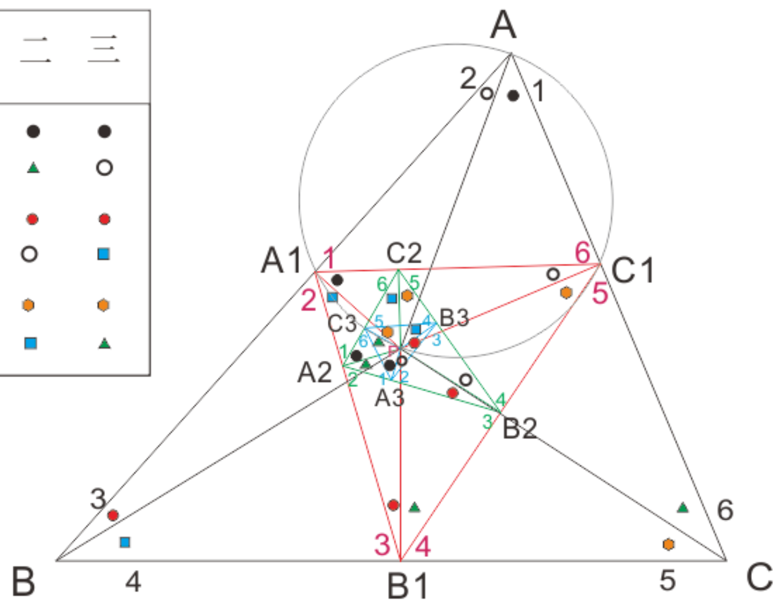




証明

まず、三角形で考える。

頂点		元	一	二	三
A	1	●	●	●	●
	2	○	■	▲	○
B	3	●	●	●	●
	4	■	▲	○	■
C	5	⬢	⬢	⬢	⬢
	6	▲	○	■	▲



定点と三角形の頂点を結ぶ線分によって作られる角に上のような番号をつける。１回目の垂線の足三角形 A1B1C1 にも番号を対応させる。円周角の定理により、左表のように、同じ大きさの角が回数を追って移動していくことがわかる。その法則は、{1,2,3,4,5,6}の集合において、奇数は不変、偶数は－２するということになる。

たとえば、２は、０（＝６）、４，２、というように、３巡目で同じ角度に戻るのである。この法則にしたがえば、四角形以上のｎ角形でもｎ巡目に同じ角に戻ることが容易に理解

できる。
また、定点から各頂点までの距離の比をみると、

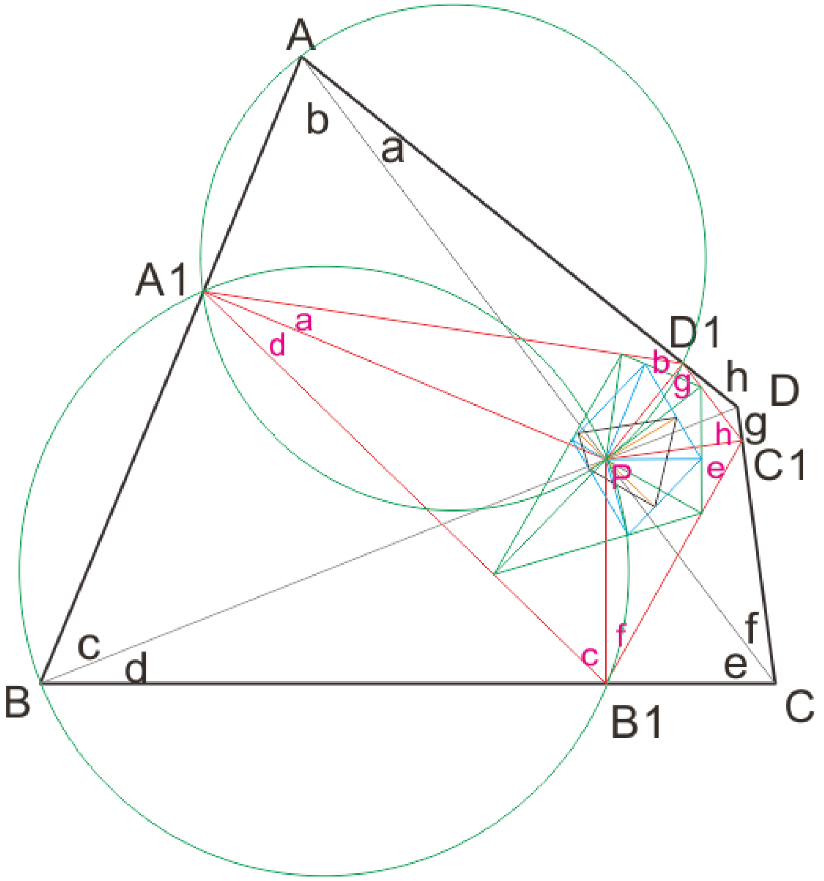
$C1P = AP \sin\bigcirc$
$B1P = CP \sin\triangle$
$A1P = BP \sin\square$

$C2P = A1P \sin\triangle = BP \sin\square \sin\triangle$
$B2P = C1P \sin\square = AP \sin\bigcirc \sin\square$
$A2P = B1P \sin\bigcirc = CP \sin\triangle \sin\bigcirc$

$C3P = A2P \sin\square = CP \sin\triangle \sin\bigcirc \sin\square$
$B3P = C2P \sin\bigcirc = BP \sin\square \sin\triangle \sin\bigcirc$
$A3P = B2P \sin\triangle = AP \sin\bigcirc \sin\square \sin\triangle$

となっているから、
三角形 ABC と三角形 A3B3C3 では、点 P から各頂点までの距離の比は
$\sin\square \sin\triangle \sin\bigcirc$
であり、相似である。

つぎに、四角形の場合を調べる。



図のように記号を振ると、

		元	１回目	２回目	３回目	４回目
A	1	a	a	a	a	a
	2	b	d	f	h	b
B	3	c	c	c	c	c
	4	d	f	h	b	d
C	5	e	e	e	e	e
	6	f	h	b	d	f
D	7	g	g	g	g	g
	8	h	b	d	f	h

以上より、４回目に角が元通りになることがわかる。そして、上の図では点 P を対角線の交点にとっているので、３回目に注目すると、

$A3=a+h$

$C3=e+d$

ところで、三角形 PDA において、$a+h=\angle APB$

また、三角形 PBC において、$e+d=\angle CPD$

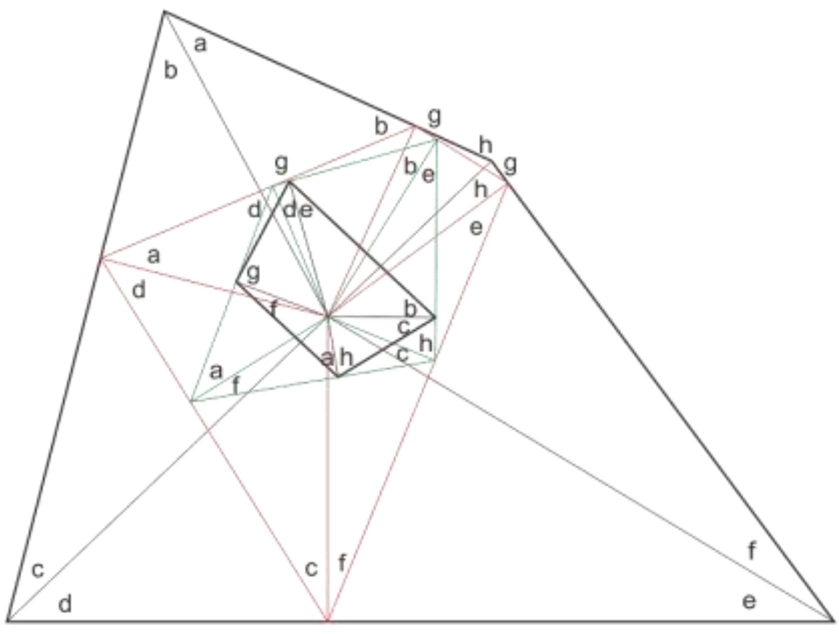
ここで、$\angle APB$ と $\angle CPD$ は対頂角であるから等しい。よって、

$A3=C3$

同様に、$B3=D3$

だから、対角線の交点を定点とする A3 は、平行四辺形である。

ついでに、定点 P が対角線上にある場合も調べてみた。



すると、３回目の四角形において $a+h+c+b$ は、三角形 ABD の内角の総和であるから１８０度。よって３回目の四角形は台形である。