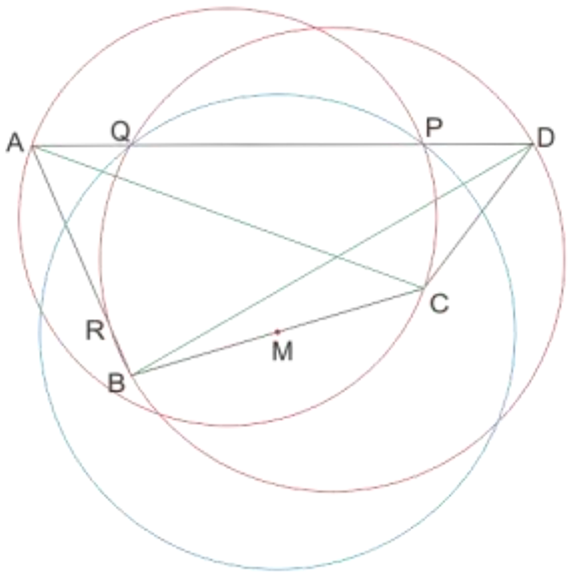
四角形の対角線を直径とする円

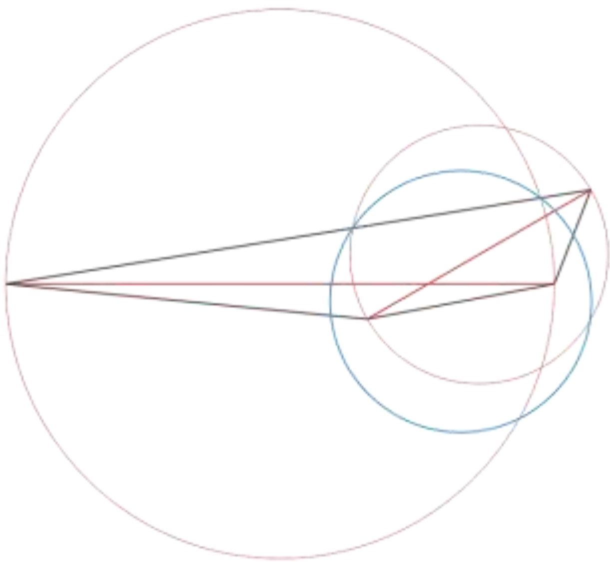
山﨑憲久

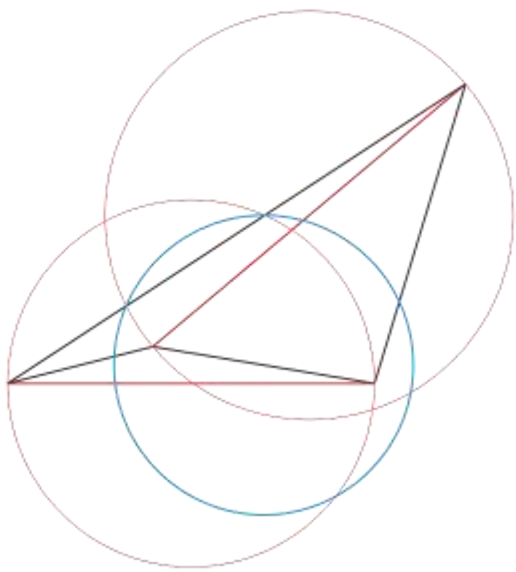
任意の四角形の二本の対角線を直径とする円を描き、それらの円と四角形 ABCD の辺との交点を P,Q,・・などとする。



このとき、交点のうち少なくとも２点は、上の図の場合は P と Q であるが、四角形のいずれかの辺(上の図では BC)の中点を中心とする円の円周上にある。
四角形の形状によって交点の数は異なり、描ける円の数も変わる。

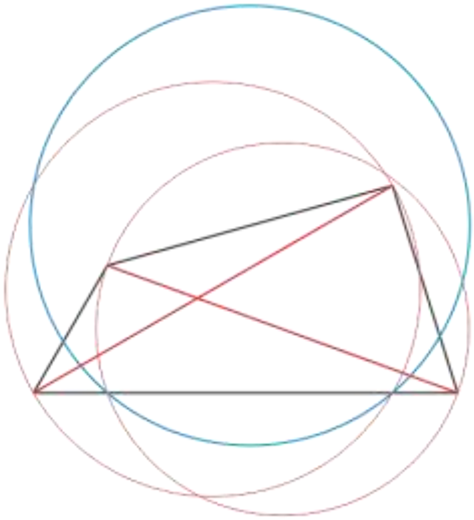
（1） 交点が２の場合

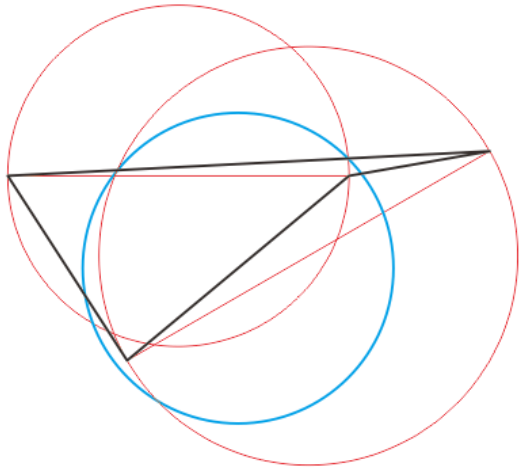




交点が２つで１つの辺の上にある場合、その対辺の中点を中心とする円の円周上に２つの交点はある。

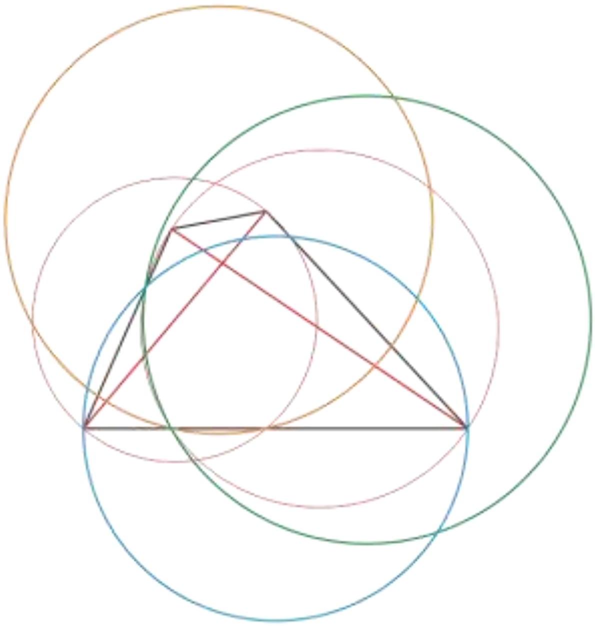
（２）　交点が３の場合





交点が３の場合は、同一辺上にある２交点が、対辺の中点を中心とする円の円周上にある。

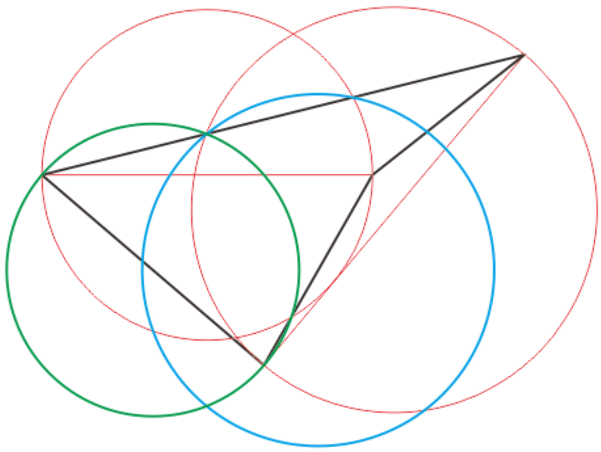
（３）　交点が４の場合



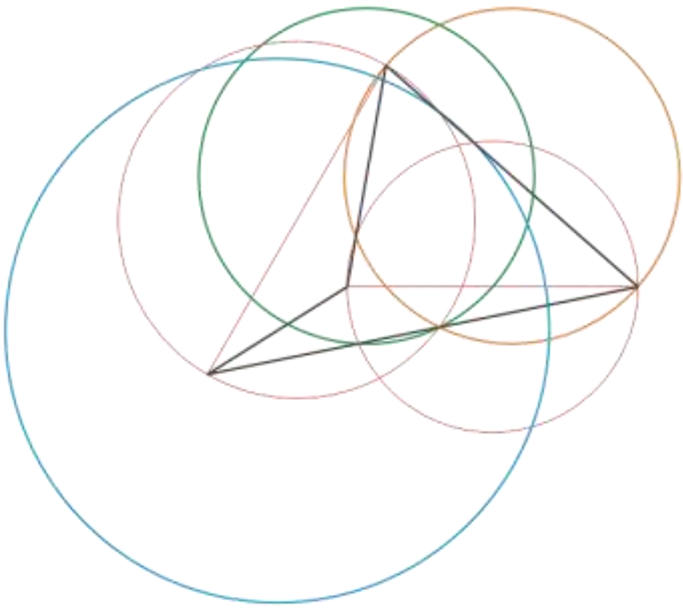
同一辺上にある２交点を通る円が１つ、対辺に位置する２交点を通る円が１つ、同一辺上にある２交点のうちの１交点と隣り合う辺上にある１交点とを通る円が１つ、合計３つの円が描ける。

同一辺上にある２交点を通る円が１つ、対辺に位置する２交点を通る円が１つ、の２つの円が描ける。

凹四角形の場合

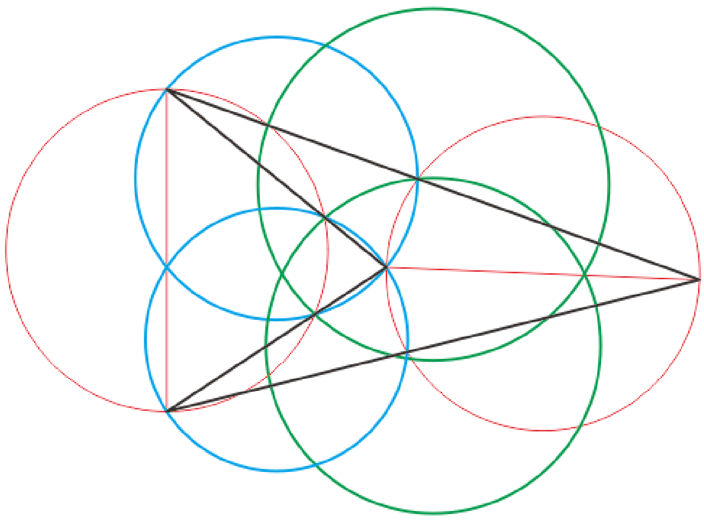


（４） 交点が５の場合



同一辺上にある２交点を通り、対辺の中点を中心とする円が２つ、対辺に位置する２交点を通る円が１つ、合計３つの円が描ける。

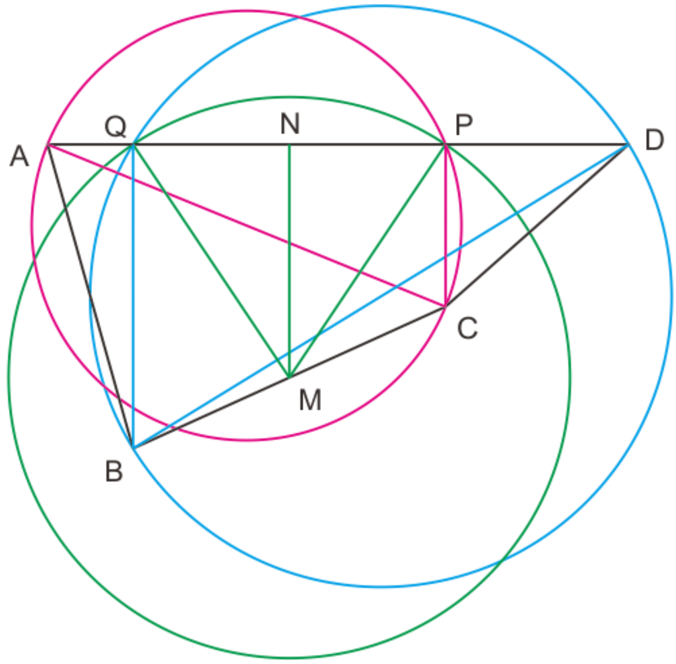
（６） 交点が６の場合



同一辺上にある２交点を通り、対辺の中点を中心とする円が２つ、対辺に位置する２交点を通る円が２つ、合計４つの円が描ける。

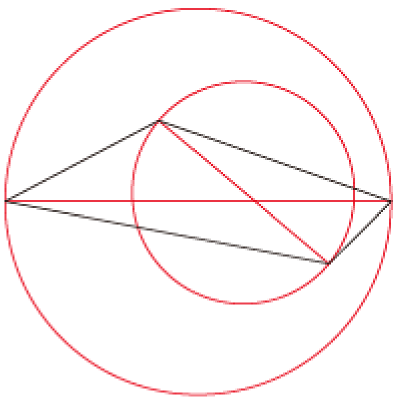
証明

図のように補助線を引き、MP=MQ であることを示せばよい。

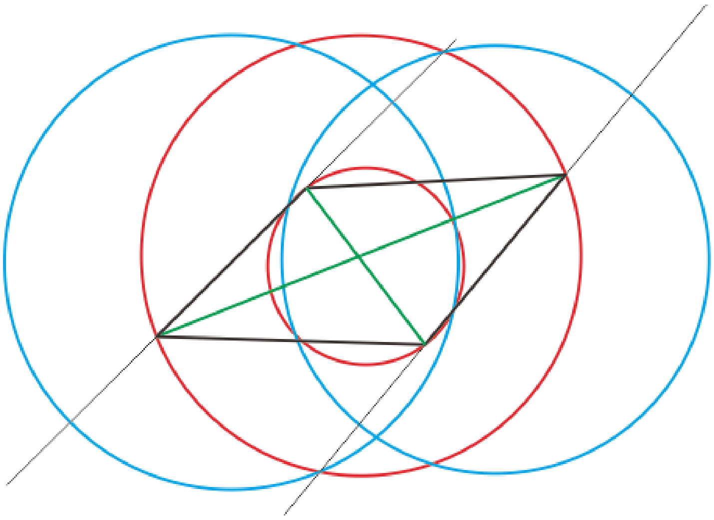


AC を直径とする円において、交点Ｐは円周上の点であるから、∠ＡＰＣは直角。
ＢＤを直径とする円において、交点Ｑも円周上の点であるから、∠ＤＱＢも直角。
したがって、ＰＣとＱＢは平行で、ＢＣＰＱは台形である。
よって、ＢＣの中点ＭからＰＱに下した垂線の足Ｎによって、線分ＰＱも二等分される。
つまり、三角形ＭＮＱと三角形ＭＮＰは合同（鏡像）であるから、ＭＰ＝ＭＱである。

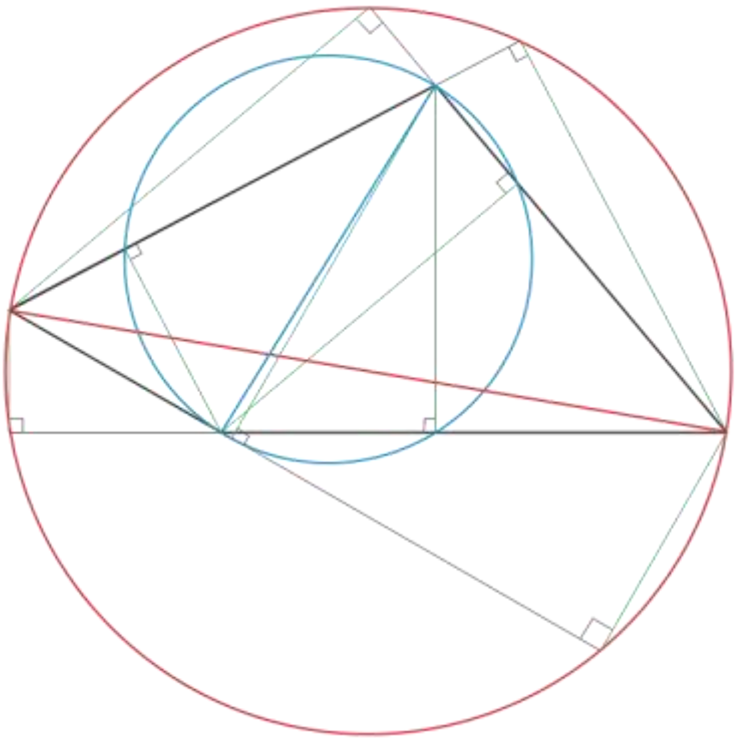
ここで五輪先生から、次のような図はどう解釈するか？　という思わぬご指摘をいただいた。



対角線を直径とする円が交差しない場合があったか、と頭を抱えていたところ、五輪先生から、線分を延長してみたらという助け舟をいただいた。



たしかに、対角線を直径とする円と、四角形の辺を一部とする直線との交点を含めれば、
対辺の中点を中心とする円が２つ描けることがわかった。
なるほど、対角線は両端が決まっていないと意味をなさないが、四角形の辺というのは直線とみなしても差し支えないと理解した。
そうすると次のような図も描けることに気が付いた。



四角形の４つの辺を直線とみなして対角線を直径とする円との交点をすべて取ってみると、
それら８つの交点は四角形の４頂点から向かい合う辺に下した垂線の足であった。
凸四角形でも、凹四角形でも、辺が交差する場合でも確認できた。
証明は、円周角の定理によって容易にできる。