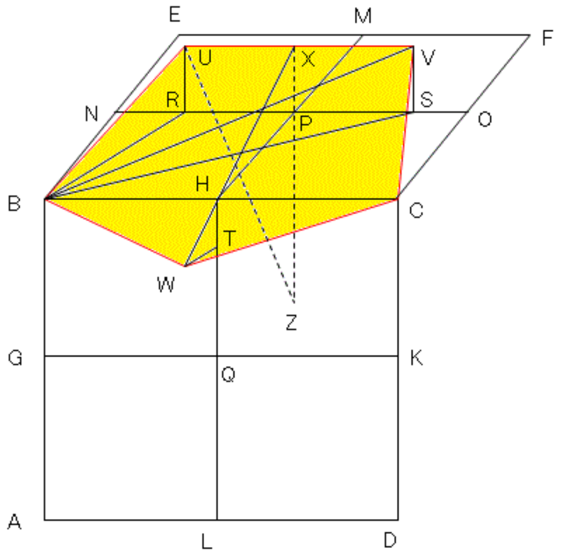
# ユークリッド「原論」における正１２面体の証明

中川　宏（図と和訳）

底本 'Euclid's Elements' by David E. Joyce 1997

第１３巻 ［ 定理１７ ］

前に示した図のように、球に内接する正１２面体を構成すると、
正１２面体の一辺の長さは、apotome とよばれる無理数となる。




前に示した立方体のたがいに直交する２平面を ABCD と CBEF としよう。
辺 AB,BC,CD,DA,EF,EB,FC を各々　点 G,H,K,L,M,N,O で二等分し、GK,HL,MH,NO を結ぶ。
そして線分 NP,PO,HQ をそれぞれ点 R,S,T で黄金比に分割する。そのさい RP,PS,TQ のほうが大きくなるようにする。

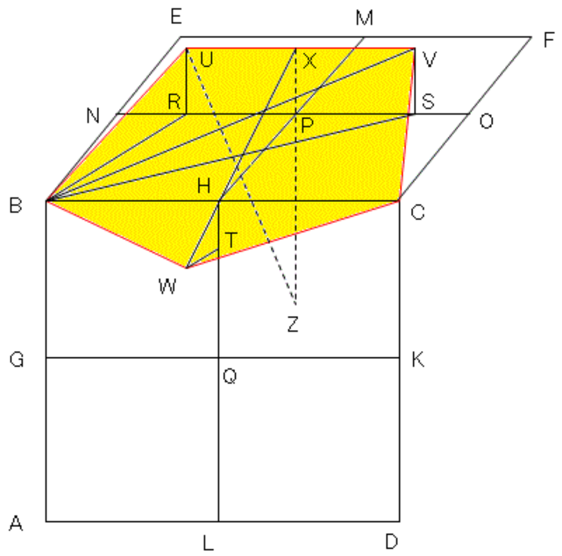
[注]NR : RP＝１ ： $\tau$ (約 1.618)など

点 R,S,T からそれぞれ立方体の外側に垂直に線分を伸ばし RU,SV,TW とする。それらの長さは RP,PS,TQ と等しくなるようにする。そして UB,BW,WC,CV,VU を結ぶ。
このとき五角形 UBWCV は(1)等辺 (2)同一平面 (3)等角であることを示そう。

(1) RB,SB,VB を結ぶ。
すると、線分 NB が点 R で黄金比に分けられ、RP のほうが大きいので
$PN^2+NR^2=3RP^2$

[注]　NR:RP=1: $\tau$ とおくと、$PN^2+NR^2=(1+\tau)^2+1=2+2\tau+\tau^2$
ところが $\tau^2=1+\tau$ が黄金比であるから、
$PN^2+NR^2=3(1+\tau)=3\tau^2=3RP^2$ となる。

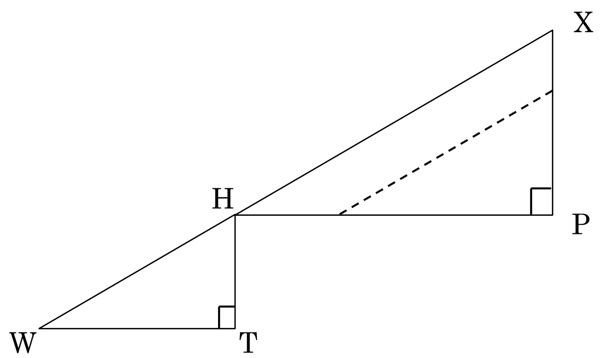
ところが、PN=NB　また PR=RU であるから、
$BN^2+NR^2=3RU^2$ である。
ところで、直角三角形 BNR において、三平方の定理より、$BR^2=BN^2+NR^2$ であるから、
$BR^2=3RU^2$　　したがって、$BR^2+RU^2=4RU^2$




他方、直角三角形 BRU において、三平方の定理より、
$BU^2 = BR^2 + RU^2$ であるから、
$BU^2 = 4RU^2$
よって、BU=2RU
ところが、SR=2PR=2RU であるから、
SR と等しい VU＝2UR
よって、BU=UV
同様にして、線分 BW=WC=CV=BU=UV であることが証明できる。
したがって、五角形 BUVCW は等辺五角形である。

(2) つぎに、この五角形が同一平面上にあることを示そう。
点 P から線分 RU,SV に平行な線分 PX を立方体の外側にとり、XH と HW を結ぶ。
このとき XHW が折れ曲がっていないことを示す。

線分 HQ が点 T で黄金比に分割され、QT のほうが大きいのであるから、
HQ：QT＝QT：TH
ところが、HQ＝HP、かつ QT＝TW＝PX
よって、HP：PX＝WT：TH
そして、HP と TW はともに平面 BD に垂直であるから、たがいに平行。
また、TH と PX もともに平面 BF に垂直であるから、たがいに平行である。




二辺夾角の等しい三角形 XPH と三角形 HTW を重ねてみると、もう一つの辺どうしも平行となるから、これらは一本の直線状にある。よって、XH と HW は同一直線上にある。
こうしてすべての辺が同一平面上にある五角形 UBWCV は同一平面上にあるといえる。

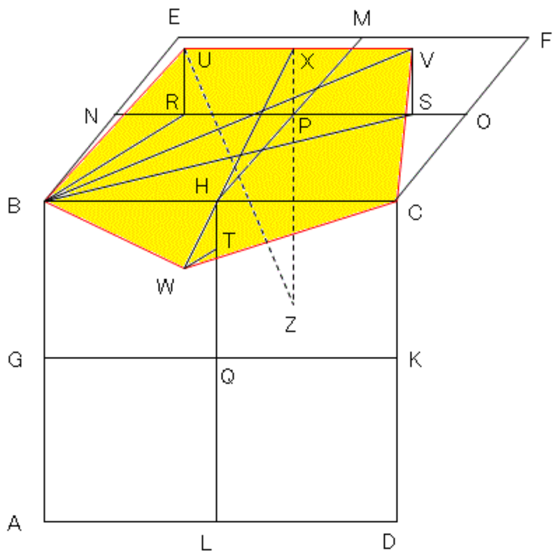
(3) 次に、この五角形が等角であることを示そう。
点 R で線分 NP は黄金比に分割され、PR のほうが大きい。かつ PR＝PS であるから、線分 NS も点 P で黄金比に分けられ、NP のほうが大きい。
よって、$NS^2 + SP^2 = 3NP^2$
ところで、NP＝NB　かつ PS＝SV であるから、
$NS^2 + SV^2 = 3NB^2$
したがって、$VS^2 + SN^2 + NB^2 = 4NB^2$

ところが、$SB^2 = SN^2 + NB^2$ であるから、

∠VSB＝直角の三角形において、$BS^2 + SV^2$ つまり $BV^2 = 4NB^2$

よって、VB＝2BN

ところが BC＝2BN であるから、BV＝BC




そして、二辺 BU と UV は二辺 BW と WC に等しく、底辺 BV は底辺 BC に等しいのであるから、

∠BUV＝∠BWC

同様にして、∠UVC＝∠BWC も証明することができる。

よって、∠BWC＝∠BUV＝∠UVC

ところで、等辺五角形の３つの角度が等しいならその五角形は等角であるから、五角形 BUVCW は等角である。

そして、この五角形は等辺であることも証明済みであるから、五角形 BUVCW は等辺・等角である。

この五角形は立方体の辺 BC 上にある。

したがって、もしこれと同じ構成を立方体の１２の辺すべてに行えば、１２面の等辺等角の五角形からなる立体図形ができる。これは正１２面体とよばれる。

(4)いま、立方体に外接する球の中でこの正１２面体をかんがえてみよう。すると、正１２面体の一辺は apotome とよばれる無理数の長さとなることが証明される。

線分 XP を延長して XZ とする。

そうすると、第１１巻の最後の定理のひとつ前の定理で証明したことにより、PZ は立方体の対角線に交わり、かつ互いに２等分する。

点 Z でそれぞれを２等分すると、点 Z は立方体が内接する球の中心点である。そして ZP は立方体の一辺の長さの２分の１である。

UZ を結ぶ。

線分 NS は点 P で黄金比に分割され、NP のほうが大きいのであるから、

$NS^2 + SP^2 = 3NP^2$

しかし、NP＝PZ　かつ　XP＝PS　であるから、

NS＝XZ

また、PS＝RP であるから、

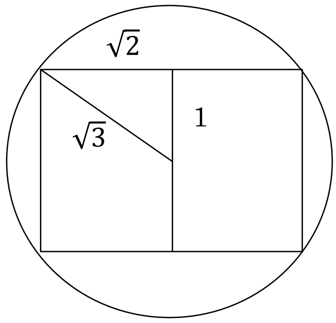
PS＝XU

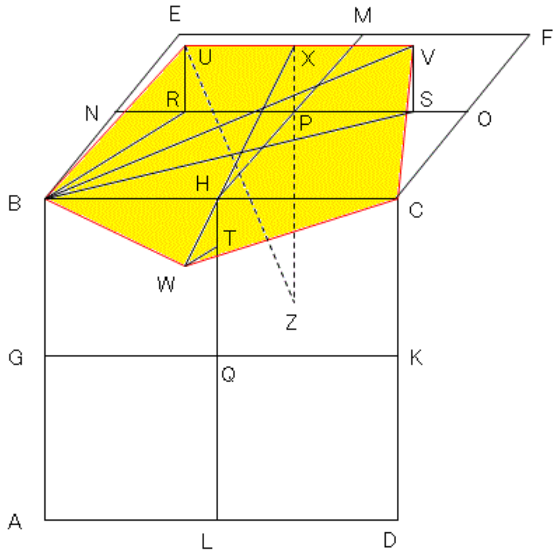
よって、$ZX^2 + XU^2 = 3NP^2$

しかし、$UZ^2 = ZX^2 + XU^2$ であるから、

$UZ^2 = 3NP^2$

ところで、立方体が内接している球の半径の２乗もまた、既に証明してきたように、球に内接する立方体の一辺の半分の長さの２乗の３倍に等しい。




線分 NP もまた立方体の一辺の半分であるから、線分 UZ は立方体が内接する球の半径に等しい。
そして、点 Z は立方体が内接する球の中心であるのだから、点 U は球の表面に載っている。
同様にして正１２面体のほかの頂点についても球の表面にあることが証明できる。
したがって、正１２面体は球に内接していることがわかった。

次に、正１２面体の一辺が apotome とよばれる無理数の長さであることを示そう。
線分 NP が黄金比に分割され、RP のほうが大きく、また、線分 PO も黄金比に分割され、PS のほうが大きいのであるから、線分 NP もまた、黄金比に分けられて、RS のほうが大きい。
NP：PR＝PR：RN という関係は２倍にしても変わらないから、
NO：RS＝RS：(NR＋SO)

しかし、NO のほうが RS より大きいから、RS のほうが NR＋SO よりも大きい。
したがって、NO は黄金比に分けられて、RS のほうが大きい。
しかし、RS＝UV であるから、NO が黄金比に分割されるとき、UV のほうが大きい。

球の半径は有理数で、その２乗が内接する立方体の一辺の半分の２乗の３倍であるのだから、立方体の一辺である NO は有理数である。
もし、有理数の線分が黄金比に分割されるなら、それぞれは無理数 apotome である。
したがって、正１２面体の一辺である UV の長さは無理数 apotome である。
[証明終わり]

[系]
このことから、立方体の一辺が黄金比に分割されるとき、その大きいほうは立方体に外接して作られる正１２面体の一辺の長さに等しい。

[注] 立方体の一辺：正１２面体の一辺＝１＋τ ：τ＝τ ：１