多対称多面体の種類

by
Michael GoLDBERG, Washington, D.C., U.S.A.

著者の論文（1）では、内割多面体と呼ばれる、三面体の頂点と五角形と六角形の面のみを持つ多面体の種類を検討することが望ましいことがわかりました。その論文では、面の数が 11 を超える場合、正確に 12 個の五角形があり、残りの面は六角形であることが示されています。

正十二面体から始めて、頂点を規則的に切頂して稜を面取りすることによって新しい内割多面体を取得できます。新しい多面体はそれぞれ、元の正十二面体を形成する五角形の中心と一致する中心を持つ 12 個の正五角形を持ち、追加されたすべての面は六角形です。この論文では、六角形の規則的な分布に囲まれた中央の正五角形からなる五角形の、12 個の合同な「パッチ」で構成されるそのようなすべての内割多面体を決定することを提案します。

3 つのパッチがパッチの頂点で交わるため、対称性が保たれるためには、パッチの頂点が多角形面の頂点または多角形面の中心のいずれかである必要があります。 また、パッチの辺の中心は、多角形の頂点、多角形の中心、または多角形の辺の中心になります。 それぞれの五角形のパッチは、10 個の同等の（合同または対称の）三角形のパッチに分割できます。 したがって、この三角形のパッチ内の六角形の配置を考慮して、求められる多面体を決定するだけで十分です。

トポロジー的には、三角形のパッチ内の六角形の配置は、六角形の通常のハニカム配置の 30 度の扇形の場合と同じです。 そして、この 30 度の扇形の五角形パッチの頂点のトポロジー的に異なる位置、つまり中央の五角形に対して対称な異なる位置の数だけ、求められている多面体が存在します。

(1) The Isoperimetric Problem for Polyhedra, Tohoku Mathematical Journal, 40 (1934), 226-236.

パッチの頂点の傾斜座標（軸間 60 度）として a、b を使用すると、パッチの中心から頂点までの距離の 2 乗は a^2+ab+b^2に等しくなります。 したがって、このパッチの六角形の総数は $10(a^2+ab+b^2-1)/12$ です。 12 個の五角形の面を追加すると、多角形の境界となる面の総数は次のようになります。

$n=10(a^2+ab+b^2-1)+12=10(a^2+ab+b^2)+2$。

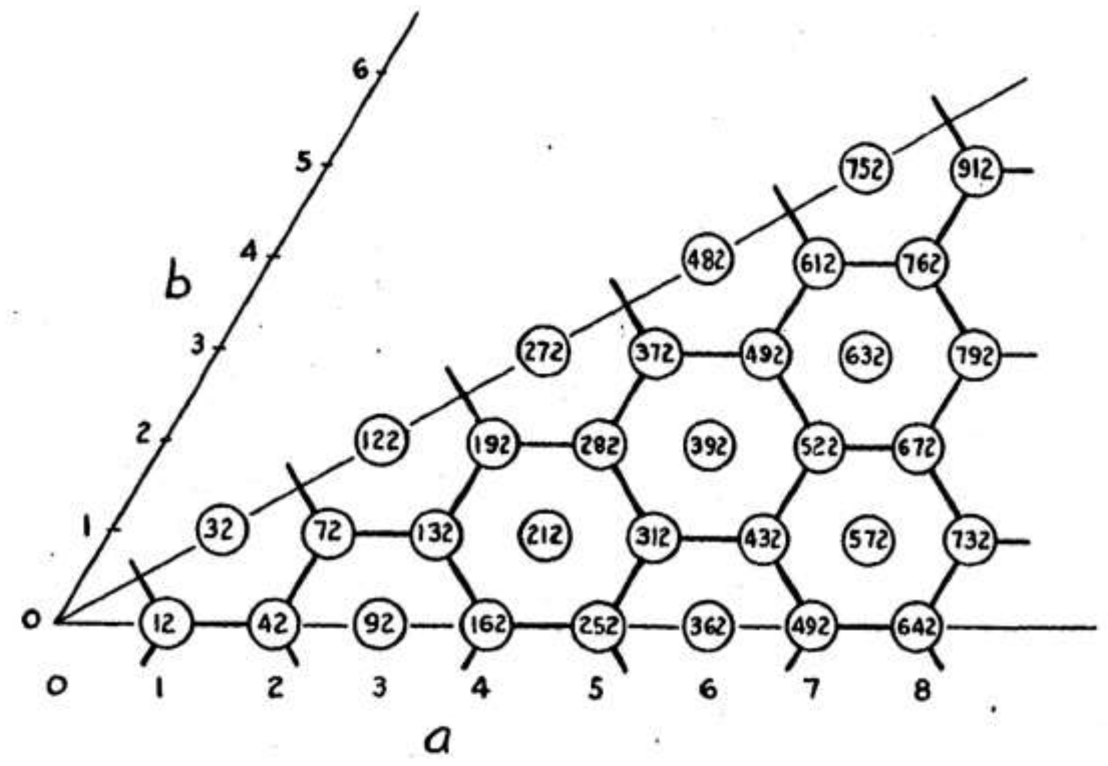


Fig. 1.

図 1 では、円はパッチの頂点の可能な位置を示しています。 円内の数字は、そのパッチを使用している多面体の面の数を示しています。

n の値の重複が配列で発生することに注意してください(図 1)。最初の重複は n = 492 で発生し、座標 7,0 または 5,3 から発生します。ただし、多面体はトポロジー的に異なるため、重複ではありません。五角形から進み、六角形の反対側のエッジを結ぶチェーン（点線）に注目すると、図 2 と図 3 で違いがすぐにわかります。 ある場合には、チェーンは五角形で終端され、他の場合には、チェーンは五角

形の間を通過します。 したがって、12 個の規則的かつ対称的に配置された五角形に加えて、同じ数の六角形の面を持つ 3 面体の多面体は、トポロジー的に異なる可能性があるという注目すべき事実に遭遇します。

配列（図 1）の繰り返しは、（1）で同じ R を生成する正の整数 a、b のペアが多数存在する場合に発生します。

（1） $a^2 + ab + b^2 = R$

割り当てられた数と少なくとも同じ数の解がある R を見つけることは常に可能です。 ここで、M と N を正の整数として試してみましょう。

(2) $a = (3M+N)(M-N),$

(3) $b = 4MN,$

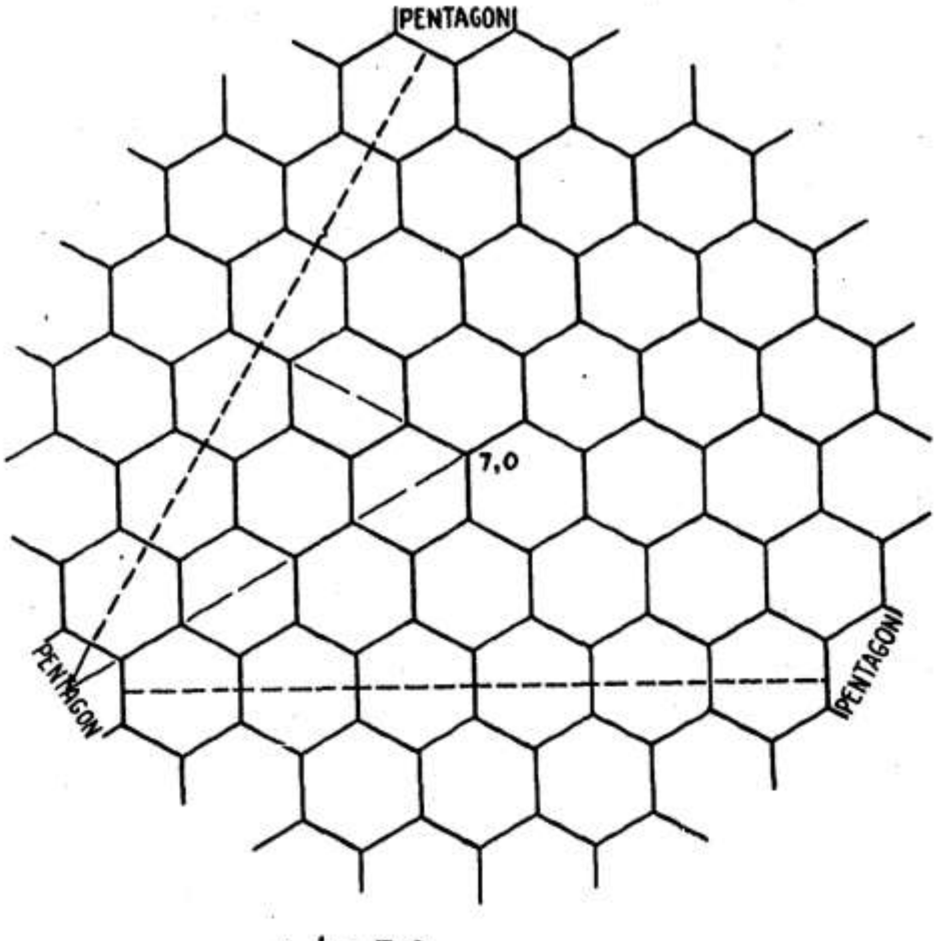


Fig. 2.

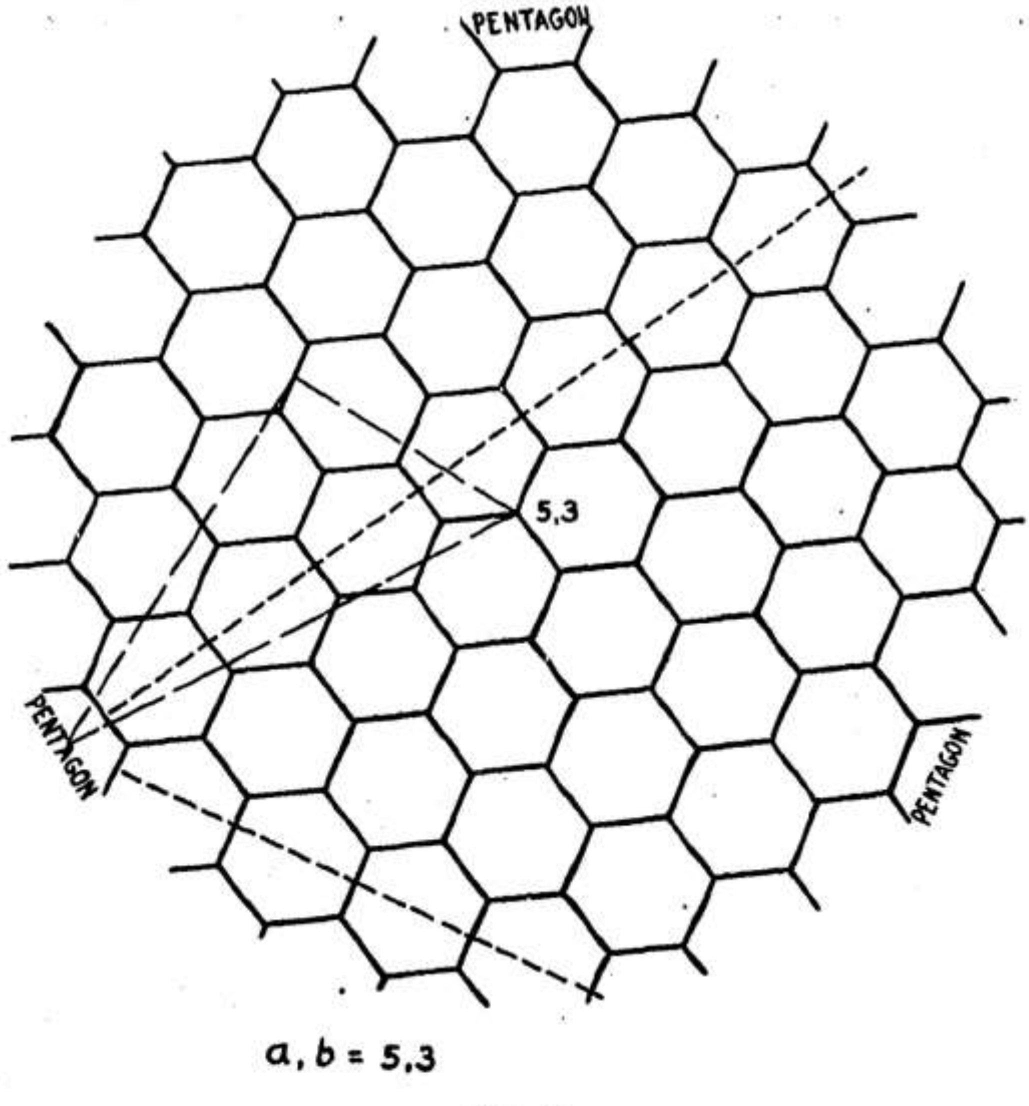
それで、

（4）　$$R=(3M^2+N^2)^2\equiv c^2。$$

したがって、R の値の無限集合を取得できます。ここで、各 R は、（1）の解の少なくとも 2 つのペア、つまり a、b と c、0 に関連付けられています。R の 2 つの値を組み合わせることにより、次のことが可能になります。少なくとも 3 対の解を持つ R を取得します。たとえば、

（5）52 + 5×3 + 32 = 72（a、b = 5,3; c、0 = 7,0）

と



a, b = 5,3

Fig. 3.

（6）82 + 8×7 + 72 = 132（a、b = 8,7; c、0 = 13,0）
組み合わせると、
（5）に 132 を掛け、（6）に 72 を掛けることによって
652 + 65×39 + 392 = 912 = 8291
および 562 + 56×49 + 492 = 912 = 8291
が得られます。

他の 2 つのペアが解として表示されるため、R = 8281 の場合はペアが 91,0 になります。 85,11; 80,19; 65,39; 56,49 は、5 つのトポロジー的に異なる多面体の構築を可能にします。
示されている方法で R の値を組み合わせることにより、割り当てられた数を超える数の解の多重度を持つ R を取得できます。
前述の多重度の現象は、四面体と立方体に基づく他の多対称多面体にも同じように当てはまります。 図 1 の原点にある五角形と、図 2 および図 3 の五角形は、三角形に置き換えられて四面体システムを形成するか、四辺形に置き換えられて立方体システムになります。
四面体システムの面の数は $2(a^2+ab+b^2)+2$ ですが、立方体システムの面の数は $4(a^2+ab+b^2)+2$ です。

(Received March 2, 1936).