

パズルだって数学的思考にやくだつ良いものを

秋山 仁

東京理科大学理数教育研究センター長
NPO 法人 体験型科学教育研究所理事長

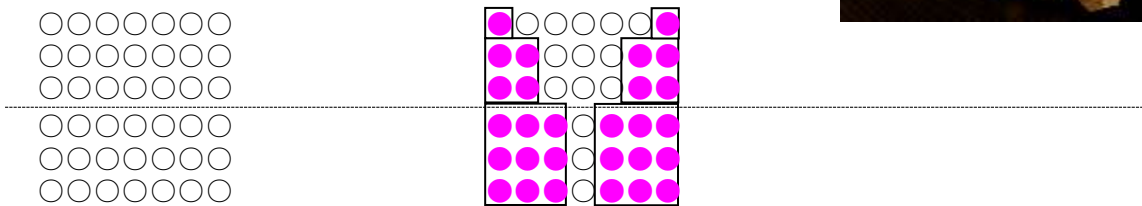


多面体木工の巨匠の中川宏さんが満を待して世に問うパズルというので、私も試させていただいた。ピラミッドが立方体になったり、直方体になったり、わずかな部品でその変身ぶりは見事なものである。

しかしこのパズルはただ面白いだけでなく、私たちが目指している体験型科学教育は単に諸公式を丸暗記させるのではなく、試行錯誤の末、自ら発見的にそれらの公式を導かせることを主眼としている。このパズルはそんな教育を行う際の教材として、そのまま活用できることを、ここに紹介したい。

テーマは「平方数の和」、1の自乗+2の自乗+3の自乗+...nの自乗=? 一般的にどう表せるかということだ。これは高校の数学の中で、とても重要な公式だ。

初級編のパズルのピラミッドは、1の自乗+2の自乗+3の自乗の姿をしているので、n=3の場合の総数が示されている。ところでこのピラミッドを3組、友達が持ち寄って合わせて変形させると、右のような平行6面体ができる。3×7が2段重なっているが、これを同じ平面に広げた図を描くとこうなる。



この長方形のなかに、1の自乗+2の自乗+3の自乗が二組配置できることを示したのが右の図なのだが、3組分のパズルを持ち寄ったのだから当然、残りの白い○の数も1の自乗+2の自乗+3の自乗の和と同数になっている。これを「ピタゴラス学派の小石並べ」と呼んでいるが、ミソは長方形に並べ替えたところにある。

長方形の縦は、1+2+3、1から3までの自然数の和なのでガウスの計算法に習って

$$1 + 2 + 3 = 1/2 \times 3 \times (3 + 1)$$

長方形の横は3×2+1なので、長方形全体の総和つまり3までの平方数の総和の3倍は、

$$3 S_3 = \{ 1/2 \times 3 \times (3 + 1) \} \times (3 \times 2 + 1) \text{ となり、求めたい平方数の和 } S_3 \text{ は、}$$

$$S_3 = 1/6 \times 3 \times (3 + 1) \times (3 \times 2 + 1) \text{ となる。}$$

この方法を一般化すると、nまでの自然数の総和 S_n が、
 $S_n = 1/6 \times n (n + 1) (2n + 1)$ で表せることが発見的に導けるわけだ。

シリーズのパズル超上級編をつかうと、4までの平方数の和についても同じように一般的な公式を導くことができるから、こんどは自力でぜひ挑戦してみしてほしい。