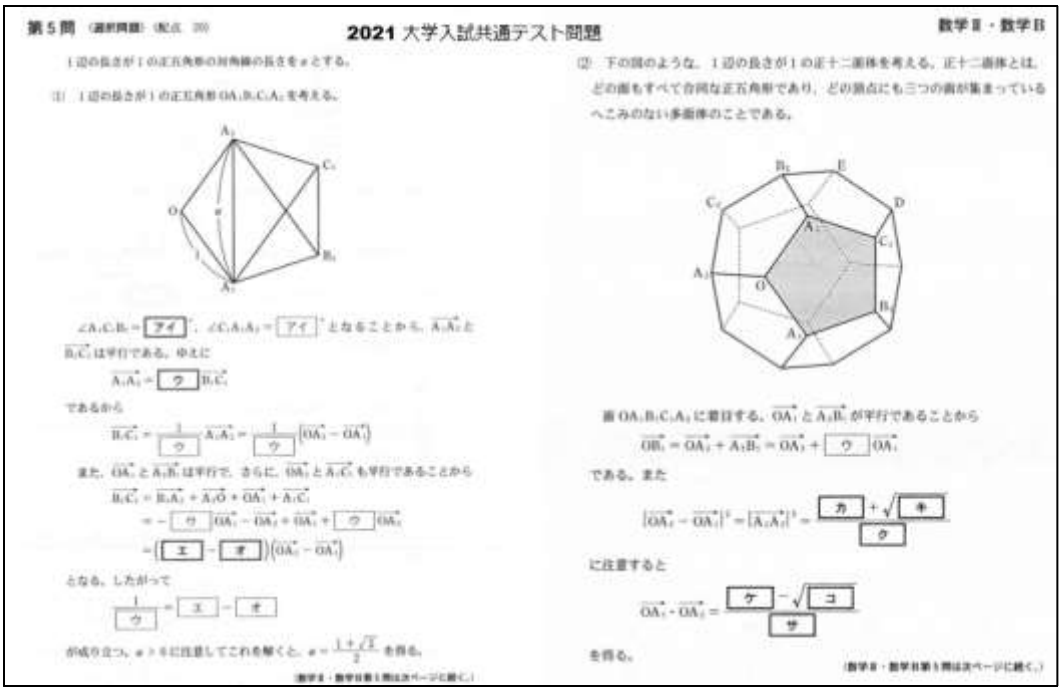
正十二面体製作法への２つのアプローチ

中川宏

2020 年 11 月、岩手県立一関第一高等学校の宮本次郎先生が、１学年全員約 200 名による正十二面体の切り出し実習を行ったことは、コロナの暗雲を吹き飛ばすような快挙でした。

奇しくも２か月後に行われた大学入試共通テスト数学に、正十二面体関連の問題が出題されたというこれまた歴史をかえるような事実とともに永く記憶したいものです。



第５問 (選択問題)(配点 20)　2021 大学入試共通テスト問題　数学II・数学B

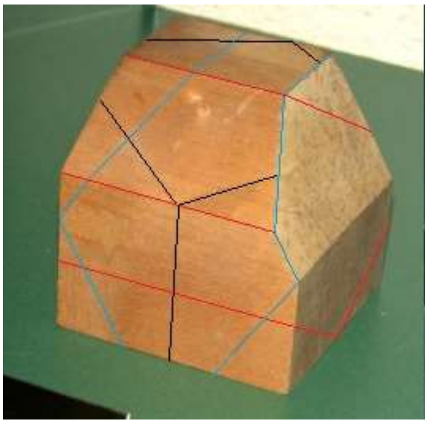
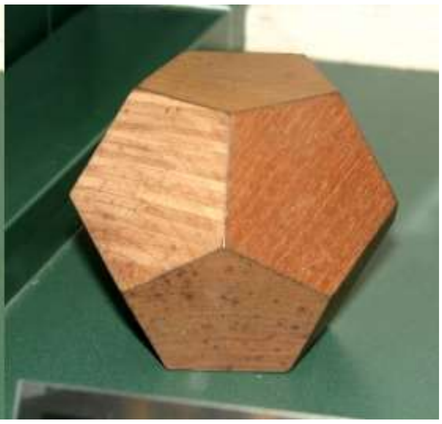
1辺の長さが1の正五角形の対角線の長さを a とする。

(1) 1辺の長さが1の正五角形 $OA_1B_1C_1A_2$ を考える。

(2) 下の図のような、1辺の長さが1の正十二面体を考える。正十二面体とは、どの面もすべて合同な正五角形であり、どの頂点にも三つの面が集まっているへこみのない多面体のことである。

そこで、教育課程で正十二面体の製作方法を取り扱う場合に踏まえておきたい事柄を若干整理してみましょう。

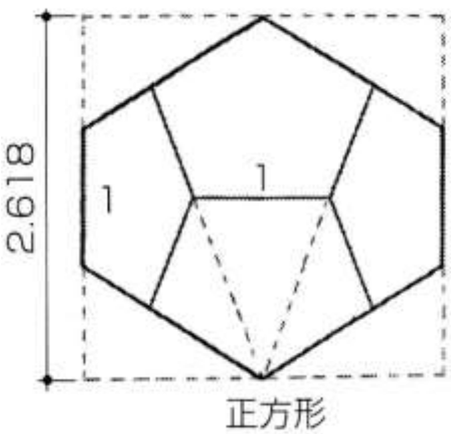
◆歴史
塊としての正十二面体を製作する方法について書き残したものは、私が知る限りでは佐藤郁郎先生との共著「多面体木工」(2006 年) までありませんでした。以降世界中に情報提供を呼びかけましたが、いまだに見つかってはいません。
ただし、日本には、木片上の墨付けとして製作法を示した模型がのこされています。

菱田為吉

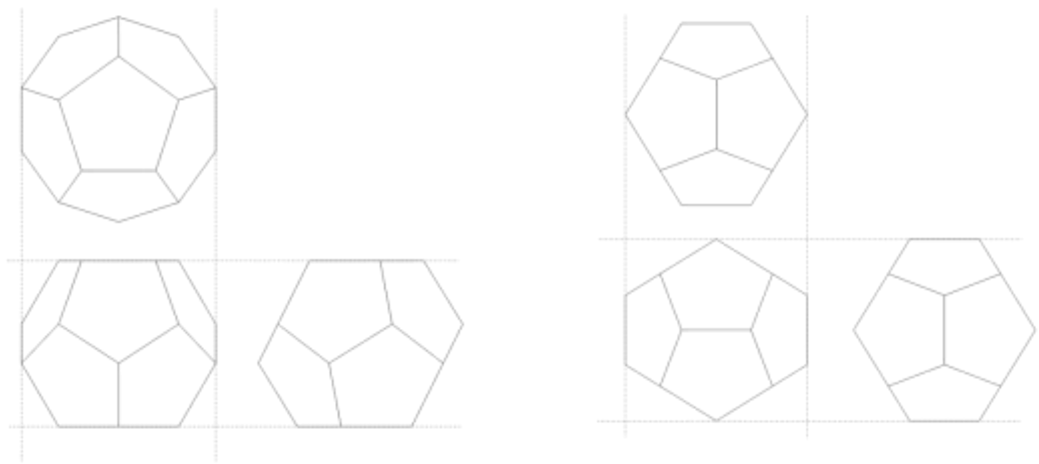
東京理科大学近代科学資料館に所蔵されているこれらの木製品の製作者は、東京理科大学の前身・東京物理学校の講師であった菱田為吉(日本画家・菱田春草の兄)です。明治３０年代の作とみられています。写真中央が完成形、左は立方体に２回の切稜を施した中間製品であることが見て取れます。これらを見れば菱田為吉が自ら製作法を考案し、後世に伝えるためにわざわざ製作法を知ることができる中間製品を残したのだろうと推測できます。

◆三面図からの図学的アプローチ
時代は下って1970年前後のことと、ご本人から伺いました。菱田為吉の模型とは無関係に、しかし同じ方法をある石工職人に教えた人は宮崎興二先生（京都大学名誉教授）です。



もともと建築や図学を専門にされる宮崎先生は、上のような投影図（辺心図）をもとに、立方体から正十二面体を切り出す方法を考えられたそうです。

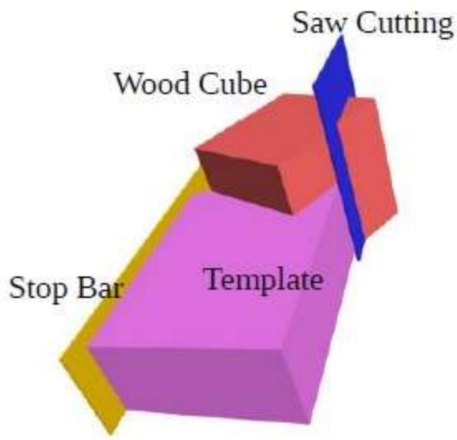
現在の学校教育でも中学校の技術において、作りたいものの製作の前に、三面図を描くことを学習するようですので、正十二面体の模型を見ながら三面図を描くことは無理のない進め方でしょう。
そうはいっても、正十二面体の模型を見て上のような投影図を描くことは容易なことではありません。大半の人が描く三面図は左側のようになることが想像できます。模型をテーブルの上に置いた場合に最も素直にとれる投影図だからです。



しかしもし見方を変えて右側のような三面図を描くことができれば、三面図が同一であることや正面図に外接する正方形の存在を直観的に理解することができ、さらにすすんで空間的に正十二面体に外接する立方体を想像する足掛かりとなるでしょう。そのためには、模型をテーブルに置いたまま静的に観察するのではなく、模型を手に取っていじくりまわすという動的な観察を促すことが不可欠になります。

◆ユークリッド「原論」からの立体幾何学的アプローチ
「正多面体を解く」（一松信著）には、「正十二面体は、…直接に作るのなら、次のように『立方体に屋根をかける』のがよいでしょう。これも『原論』第 13 巻にあります。」と述べられていて、次のような図が掲げられています。

私はこれを見ても立方体の木片に屋根形の木材を６個貼り付けるというツギハギ細工しか思い浮かばなかったのですが、つい先日オーストリアのアーティスト Franz Wieser さんから「原論」の記述を読んで「屋根」の勾配を計算し、それに基づく角度定規に立方体をセットして正十二面体を作ったという連絡を受けました。彼が描いた図です。



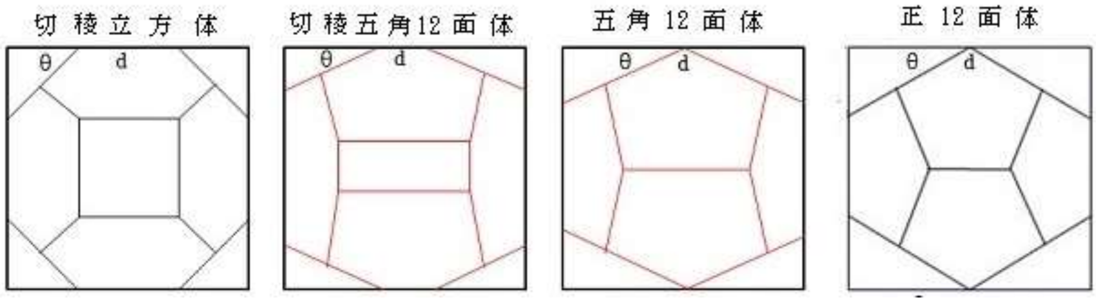
彼はその時の感動を ’it sparked with me’ と表現していますが、おそらく立方体に外接する正十二面体の図を見たときに、彼には正十二面体に外接する大きな立方体が直観的に見えたのでしょう。正十二面体に立方体が内接するのなら、外接する立方体もあるかもしれないという推論は、すこし幾何学的に訓練された人には可能だということを実証してくれたわけです。

正十二面体の模型を使えば、正五角形面の対角線をまず１本とり、その両端に繋がる他の面の対角線を一筆書きのように思い浮かべたり、書き込んだりすることによっても内接する立方体は看取することができます。そしてさらにそれを拡大した外接する立方体を思い浮かべることができれば、「原論」を知らなくても空間幾何学的に正十二面体の作り方を構想することも可能でしょう。

◆偶然の賜物

以上の２つのアプローチとの対比において私の経験をふりかえってみます。

私がじっさいに正十二面体を初めて作ったのは、木工作業をつうじた立方体の変形加工によるものでした。それはおよそ以下のような過程をたどりました。



最初に立方体を４５度の定規にかけて切稜立方体ができました。この時何ができるか全く思いもよりませんでした。次に４５度より小さい角度定規にかけると左から２番目の立体ができました。この時もいったいどんなものができるだろうという期待だけで結果を思い描くことなく作りました。さらに角度はそのままでより深く削ると面は五角形ばかりになりました。ここでようやく、もう少し角度を大きくすれば五角形が正五角形になるかもしれないと期待することができました。それが結果的によかったのです。しかし出来上がったものが正十二面体で間違いないかどうかは、佐藤先生に事後的に証明してもらうまでは確信できませんでした。

この過程は立方体からの位相幾何学的な変形操作の段階的連続と跡付けることもできなくはないでしょうが、じっさいは単なる遊び心による試行錯誤でした。その際の副産物は豊富に得られて今日の私の活動の基になっているのですが、立方体から正十二面体の製作へとたどり着く道筋としては必要のない回り道といってよいでしょう。