

## 黄金数の 1 次式の特徴

中川宏

正十二面体の正六角形断面（小）による断片の体積計算の過程で、 $29+52\tau$ が、 $(4+7\tau)$ と $(9-\tau)$ との積で表せたことに興味を感じて、 $a+b\tau$ が $(c+d\tau)(e+f\tau)$  [ $a,b,c,d,e,f$ は整数]となる場合を調べてみた。

$$\text{この式から、 } e = \frac{bd-ac-ad}{d^2-c^2-cd}, \quad f = \frac{ad-bc}{d^2-c^2-cd}$$

であることから、判別式  $H=d^2-c^2-cd$  とすると、 $H=\pm 1$  である場合は  $e,f$  が整数になることがわかる。そのときの  $[c,d]$  の組は、

- [0,1]    [±1,0]
- [1,1]    [±1, ∓1]
- [1,2]    [±2, ∓1]
- [2,3]    [±3, ∓2]
- [3,5]    [±5, ∓3]
- [5,8]    [±8, ∓5]
- [8,13]   [±13, ∓8]
- [13,21] [±21, ∓13]

などである。4列の数字は見事に、フィボナッチ数列をなしている。 $c+d\tau$ は、 $\tau, \tau^2, \tau^3, \tau^4, \tau^5, \tau^6, \tau^7, \tau^8, \dots$  および、

$1, \tau^{-1}, \tau^{-2}, \tau^{-3}, \tau^{-4}, \tau^{-5}, \tau^{-6}, \tau^{-7}, \dots$  となっている。

いいかえると、どんな黄金数の 1 次式でも、黄金数のあらゆる累乗と別の黄金数の 1 次式との積としてあらわすことができるということである。

判別式  $H=\pm 1$  でない場合でも、 $a+b\tau=(c+d\tau)(e+f\tau)$  となる例を列举してみる。同様の判別式  $G=b^2-a^2-ab$  も併記する。

$a + b\tau = (c + d\tau)(e + f\tau)$		H	G				
1	3	3	4	-1	1	-5	5
1	4	4	5	-1	1	-11	11
1	5	5	6	-1	1	-19	19
1	6	6	7	-1	1	-29	29
1	7	7	8	-1	1	-41	41
1	8	2	1	-1	3	-5	55
1	8	3	2	-1	2	-11	55

1	8	4	7	9	-5	5	55
1	8	5	7	-4	3	-11	55
1	8	8	9	-1	1	-55	55
2	1	3	4	2	-1	-5	-5
2	1	4	7	-3	2	5	-5
2	5	5	7	-1	1	-11	11
2	7	7	9	-1	1	-31	31
3	1	4	5	2	-1	-11	-11
3	2	5	7	2	-1	-11	-11
3	4	2	1	1	1	-5	-5
3	4	4	7	-1	1	5	-5
4	1	1	5	-1	1	19	-19
4	1	5	6	2	-1	-19	-19
4	3	3	7	-1	1	19	-19
4	5	3	1	1	1	-11	-11
4	5	5	9	-1	1	11	-11
4	7	1	3	1	1	5	5
4	7	2	1	1	2	-5	5
5	1	1	6	-1	1	29	-29
5	1	6	7	2	-1	-29	-29
5	2	2	7	-1	1	31	-31
5	3	3	8	-1	1	31	-31
5	4	4	9	-1	1	29	-29
5	5	1	3	-1	2	5	-25
5	5	2	1	2	1	-5	-25
5	5	3	4	3	-1	-5	-25
5	5	4	7	-4	3	5	-25
5	6	4	1	1	1	-19	-19
5	7	3	2	1	1	-11	-11
5	9	1	4	1	1	11	11
6	1	1	7	-1	1	41	-41
6	1	7	8	2	-1	-41	-41
6	7	5	1	1	1	-29	-29
7	1	1	3	-5	4	5	-55
7	1	2	1	4	-1	-5	-55
7	1	2	5	-4	3	11	-55

7	1	3	2	3	-1	-11	-55
7	1	3	4	9	-5	-5	-55
7	1	4	7	-14	9	5	-55
7	1	5	7	7	-4	-11	-55
7	1	8	9	2	-1	-55	-55
7	2	2	9	-1	1	59	-59
7	6	1	3	-2	3	5	-55
7	6	1	4	-1	2	11	-55
7	6	2	1	3	1	-5	-55
7	6	3	1	2	1	-11	-55
7	6	3	4	5	-2	-5	-55
7	6	4	5	3	-1	-11	-55
7	6	4	7	-7	5	5	-55
7	6	5	9	-4	3	11	-55
7	8	6	1	1	1	-41	-41
7	9	5	2	1	1	-31	-31
8	1	1	9	-1	1	71	-71
8	9	1	3	-1	3	5	-55
8	9	2	5	-1	2	11	-55
8	9	3	2	2	1	-11	-55
8	9	3	4	4	-1	-5	-55
9	2	1	3	-6	5	5	-95
9	2	2	1	5	-1	-5	-95
9	2	3	4	11	-6	-5	-95
9	2	3	7	-4	3	19	-95
9	2	4	3	3	-1	-19	-95
9	2	4	7	-17	11	5	-95
9	7	1	3	-3	4	5	-95
9	7	1	5	-1	2	19	-95
9	7	2	1	4	1	-5	-95
9	7	3	4	7	-3	-5	-95
9	7	4	1	2	1	-19	-95
29	52	4	7	9	-1	5	355

以上から、 $a+b\tau=(c+d\tau)(e+f\tau)$  [ $a,b,c,d,e,f$ ,は整数]となる場合には、判別式  $G=b-a^2-ab$  および判別式  $H=d^2-c^2-cd$  の絶対値はいずれも、1 の位が1あるいは9の数またはその5倍の数( $N_{159}$ )となっており、 $|G|=|H|$ あるいは $|G|=N_{159}|H|$ であるようだ。