整正多面体

東京物理学校雑誌 第 469 号（1930.12）
菱田為吉

定義

対称軸　有限な一つの多面体が、これを貫く一つの直線を軸としてその周りに１回転するとき、少なくとも一度はその途中に原位置に重なり合うときは、この多面体はこの直線に関して対称であるといい、この直線を対称軸という。そして１回転中に n 度原位置に重なり合うときは、この多面体はその軸に関して n 方対称であるといい、この軸を n 方軸という。特に n＝2 の場合は略して単に対称であるという。以下、軸をXm, Yn, ・・・と表し、n を方数という。

整正多面体　２つ以上の対称軸をもつ多面体を整正多面体と名付ける。

整正多面体を１つの軸Xn の周りに回転するときは、$\frac{1}{n}$ 回転ごとにこの多面体は原位置に重なり合うので、他の任意の軸Y は、順次にY′, Y"・・・と重なり合う。このとき、Y , Y′, Y", ・・・は、Xn の周りに相応位にあるという。またこの時多面体の一つの面または頂点も順次に他の面または頂点のいずれかに重なり合うので、これら一組の面または頂点はXn の周りに相応位にあるという。

整正多面体の軸の根本性質

法則第一　有限な一つの整正多面体に属する軸はすべて同一点を通る。

以下、数段に分けて証明する。

（１）任意の２つの同方数の軸Xn, Yn はかならず交わる。

（a）n が偶数の場合
Xn, Yn が交わらないと仮定すると、（第１図）この２軸はたがいに平行であるか、あるいは同一平面上にはない。

もし平行であれば、多面体に近い任意の位置に共通垂線L を引くことができる。また２軸が同一平面上にないときはその間に唯一の共通垂線L が存在する。いずれにしろ L とX, Y との交点をそれぞれA, B とすれば、軸は多面体を貫くのであったから、AB の長さは有限であり、かつ多面体から有限な距離にあるはず

である。

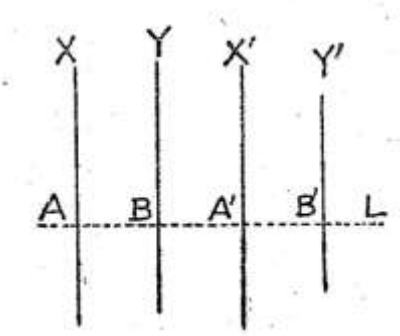

Fig. 1

今、Y のまわりに多面体を半回転すれば、A は AB の延長上の一点 A'に移り、したがって X は A'を過ぎ Y に関して対称な X'の位置をとる。このとき多面体はその原位置に重なり合うのであるから、X'の位置において必ず一つの軸が存在する。

同様にして、X'のまわりに多面体を半回転するときは、X は L に垂直であるから、X'も L に垂直であり、したがって B は L 上の B'の位置に移り、Y は B'を過ぎて X'に関して対称な位置 Y'にくる。ここでもまた一つの軸が存在するはずである。

このようにしていくと、L の上に等距離にある諸点 A"、B"を過ぎて L に垂直な軸がさらに存在することを認めなければならない。そしてそれらの諸点の近くに多面体の部分が存在することを際限なく認めなければならない。これは多面体が有限であるという仮定に反する。よって、n が偶数であるときは Xn、Yn は必ず交わる。

（b）n が奇数の場合

煩雑を避けるために軸を点で示すことにし、任意の２軸を A、A'とする（第２図）。もしこの２軸が交わらないならば、互いに平行であるかあるいは同一平面上にはない。いずれの場合でも２軸の間に共通垂線 aa'を設定（平行の場合は立体の近くに）し、A、A'との交点をそれぞれ a、a' とする。但し図には示していない。

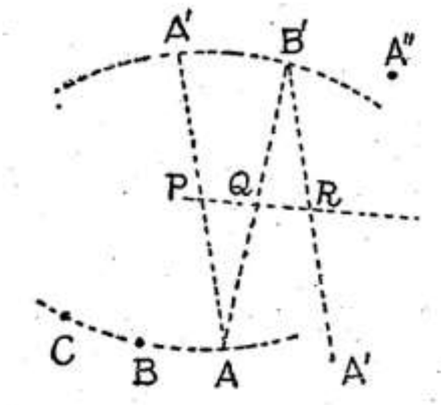

Fig.2

いま、A のまわりに多面体を１回転するときは、線分 aa’ は a を過ぎ A に垂直な平面上に一つの円を描き、その $\frac{1}{n}$ 回転ごとに a’ は順次に弧の円周上において b’、c’、・・・の位置を取り、したがって軸 A’はこれらの点を過ぎ半径に垂直でかつ円の平面に対して等角をなす位置に来る。よって A のまわりに A’と相応位に合計 n 本の軸 A’、B’、C’、・・・があることを認めなければならない。

同様に、A’のまわりに多面体を１回転することによってそのまわりに A と相応位に B、C、・・・等あわせて n 本の軸があることを認めなければならない。次に線分 aa’ の中点を過ぎこれに垂直にかつ A、A’のそれぞれと等角をなす直線（つまり２軸 A、A’の対称軸）の一つを引いて P とする。このとき、A のまわりに多面体を $\frac{1}{n}$ 回転し A’が B’に重なるとき P の取るべき位置を Q とすれば、Q は A、B’ 間の対称軸となる。

いま P のまわりに多面体を半回転するときは、多面体が原位置に重なると重ならないとにかかわらず、軸 A と軸 A’とは互いにその位置を交換する。したがって、この２軸を根源として存在を認められるべき軸はすべて２つずつその位置を交換する。よってこの範囲内では P は軸としては 2 方軸 Z_2 と同じ性質を持つ。

ところが P のまわりにこれらの軸群を半回転すれば、B は B’ の位置にくるはずであるから、A のまわりに $\frac{1}{n}$ 回転することで B’ の存在を見出す代わりに、P の半回転によって B の来るべき位置に B’ が存在することを認めなければならない。

同じ理由で、Q のまわりに半回転して A’ の位置に一つの軸 A” を見出す。とともに、P の来るべき位置における R の半回転によって A の来るべき位置に A’”

が存在することが認められる。これを続けていくならば、A、A' を根源とする軸の存在を際限なく認めなければならない。

ところがもし、A // A' であれば P // Q // R・・・であり、またもし A、A' が同一平面上にないときは P、Q、R、・・・もまた２つずつ同一平面上にない直線であって交わることはない。またこれらの直線は、ひとつの共通垂線上において等距離に際限なく配列される場合（a）と同じく無限の距離においても多面体の部分は存在しなければならない。そういう多面体は有限ではありえない。よって、n が奇数の時にも Xn、Yn は必ず交わる。

（２） 方数の異なる２つの軸Xm, Yn はかならず交わる。

なぜなら、たとえば Xm のまわりに多面体を１回転するときは、そのまわりに Yn と相応位にある軸 Yn'、Yn"、・・・があるはずである。そしてもし、Xm // Yn ならば、Yn // Yn' 、またもし Xm と Yn が同一平面上にないときは、Yn と Yn' が交わらなければもちろん交わるときも、交点が２つ以上あることになり不合理である（１，３を参照せよ）。ゆえに Xm、Yn は必ず交わる。

（３）任意の３つの軸Xl, Ym, Zn はかならず交同一点を通過する。

これらの軸は２つずつ交わるので、もしもこれらの軸が同一平面上にないときは、l,m,n の値のいかんにかかわらずその交点は必ず同一でなければならない。

またすべて同一平面上にあるばあいでも、l,m,n のなかに 2 より大きいものがあるときは、その軸の周りにあって他の２軸のひとつと相応位にありこの平面上にない軸が一つ以上存在しなければならない。ゆえにこの場合にもそれらの交点は必ず同一でなければならない。

次に、l = m = n = 2 ですべてが同一平面上 P にあるとき（第３図）。

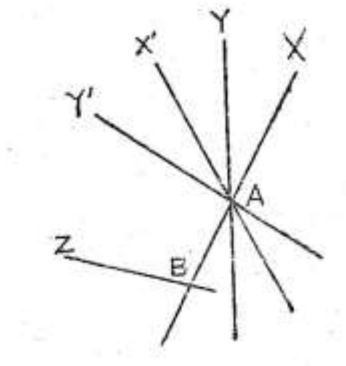

Fig.3

X、Y の交点を A とし、∠XAY の大きさを α とする。いま Y の周りに多面体を半回転すれば、平面 P によって分けられた多面体の二つの部分は、互いにその位置を交換できる。このとき X のあった位置に X' 軸が存在し、その周りに

多面体を半回転すればYはY' の位置に来る。ここに一つの軸があるはずである。そしてこのとき多面体の二つの部分は元あったほうへ移り、あたかもこの多面体を最初の位置から平面 P に沿って A のまわりに 2αだけ回転したのと同じ位置となる。ゆえにこの多面体は A を過ぎ平面 P に垂直な軸 Xp を持つはずである。ただし、p の値はαと 180°との公約数のひとつであり、180°を割った商である。

いま第３の軸 Z があって X と A でない一点 B において交わるならば、上と同じ理由で B においても平面 P に垂直な軸 Yq があって、Xp // Yq である。これは（２）によって不合理である。ゆえに B は A と合致し、X、Y、Z は同一の点を通過しなければならない。

以上述べてきたところによってひとつの整正多面体に属する軸はどの３つをとってもすべて同一の点を通過するすることがわかる。したがってすべての軸は同一点を通過することは推して知るべしである。

これで本法則は証明された。

整正多面体の中心　軸の交点は環状の多面体を除いて一般には多面体の内部にある。これを整正多面体の中心と名付ける。そしてこの点を中心とする球面が一つの頂点を通過するか、または一つの面が球面に接するときは、すべての軸の周りにこの頂点または面と相応位にある頂点は同じ球面上にあり、面は球面に接する。ゆえにもしすべての頂点がいずれかの軸の周りに相互に相応位にあるときは、この多面体は一つの球に内接し、またすべての面においても同様の関係があるなら多面体は一つの球に外接する。

法則第二　　有限なひとつの整正多面体に属する軸の数は有限であり、またそれぞれの２軸のなす角度も有限である。

（１）もしある一つの軸が一つの面内にある一点を通過すれば、この軸は必ずその面に垂直である。なぜならもし斜交するならばその周りに多面体を１回転するあいだに一度も原位置に重ならないからである。そして２つ以上このような軸があればこれらの軸は互いに平行で交わることができない。ゆえに一つの面内にある一点を通過する軸はただ１本に限られる。

（２）もし一つの軸が一つの稜と交わるときは、この軸は必ず X_2　であって、この稜の両側にあってこれに接続する二面の対称の軸である。ゆえに一つの稜と交わる軸はただ一つに限られる。

（３）もし軸 Xn が一頂点を通過するならば、そのまわりに $\frac{1}{n}$ 回転するとき、n＞2 であればこの頂点の周りにある面の中においてＡはＢに、ＢはＣに、・・・ＦはＡに重なる。そしてこれらの各対の面は直接に、あるいは延長すれば正多面角をなし、Xn はその軸に相当する。また n＝2 のときはＡはＢに、ＢはＡに重なる。いずれにしろ一頂点を通過する軸はただ一つに限られる。

よって、一つの整正多面体に属する軸の数は有限である。これにより、任意の２軸のなす角度もまた有限であることは推して知るべしである。

整正多面体の軸の組成

各軸相互の位置関係はそれらのなす角度によって定まり、その長さには無関係である。ゆえに今多面体の中心を中心として任意の半径を持つ球面を作れば、この球面はすべての軸を中心から等長に切り、その交点相互の球面上の距離はその点を通る２軸のなす角度を表す。したがってこれら諸点の球面上における分布を考察すれば各軸相互の位置関係つまり成立しうる軸群の組成を明らかにすることができる。（以下、その詳細を略し結果のみをあげてこの原稿を締めくくる）

軸群の種類

（１）正二十面体系軸群　X_5 を主軸（一つの多面体に含まれる最大の方数の軸を指し、それ以外は副軸という）とするものは１２個の X_5 と２０個の Y_3 と３０個の Z_2 とからなり、相互の位置関係は正十二面体、正二十面体に含まれる軸群と同一である。すなわち正二十面体の各面についていえば、X_5 は各頂点、Y_3 は面の中心、Z_2 は各辺の中点を通る。（第４図）

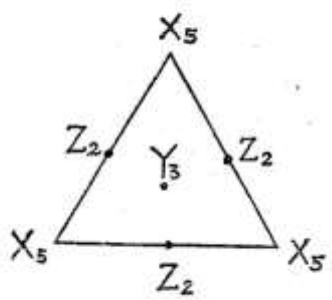

Fig.4

この軸群を正二十面体系軸群といい、これを含む多面体を正二十面体系また

は五方系の整正多面体という。これを次のように表す。

$$12X_5 + 20Y_3 + 30Z_2$$

（２）正八面体系軸群 X_4 を主軸とするものは、

$$6X_4 + 8Y_3 + 12Z_2$$

からなり、正八面体の軸群と同一であり、X_4 は各面の頂点、Y_3 はその中心、Z_2 は各辺の中点を通る。これを正八面体系軸群といい、これを持つ多面体を正八面体系または四方系の整正多面体という。

（３）正四面体系軸群 X_3 を主軸とするものは、

$$4X_3 + 4Y_3 + 6Z_2$$

からなり、正四面体の含まれる軸群と同一である。つまり X_3 は各面の頂点、Y_3 はその中心、Z_2 は各辺の中点を通る。（第５図）

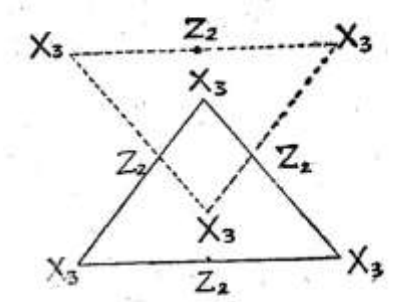

Fig.5

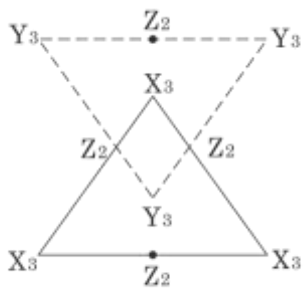

Fig.5'

これを正四面体系軸群といい、これを持つ多面体を正四面体系または三方系の整正多面体という。

この軸群において X_3 と Y_3 とは２つずつ反方向に向いて一直線上にある。しかし他の軸の回転によって位置を変えるさいに決して重なることがなく、まったく別種のものと考えるべきである。ゆえに X3 を主軸とする代わりに Y3 を主軸とする軸群（第５図破線）

$$4Y_3 + 4X_3 + 6Z_2$$

をとっても前の軸群のものと同形の多面体を得る。これらを区別するために、一方を正（＋）、他方を負（—）と名付ける。たとえば正・正四面体、負・正四面体という。

（４）倍角錘系軸群　この軸群はたがいに反対方向に向かって一直線をなす２軸 Xm を主軸とする

$$2X_m + mY_2 + mZ_2$$

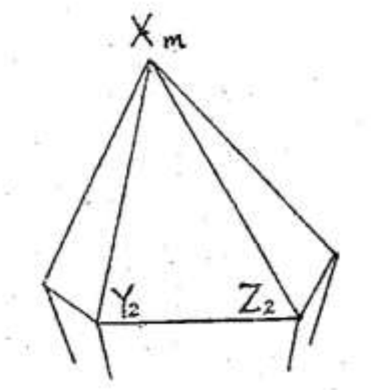

Fig.6

からなり、Xm は倍角錘の各三角形面の共通頂点を通り、他の２軸 Y_2 、Z_2 はいずれも他の２頂点を通る。（第６図）これを倍角錘系軸群といい、この軸群を持つ多面体を倍角錘系または m 方系の整正多面体という。

以上の４種のほかには成立しうる軸群及び多面体はない。

注意

これらの多面体のなかには結晶に見出せるものが多い。結晶の等軸晶系は（２）、（３）群に属し、また、正方晶系、斜方晶系、および六方晶系は（４）に属する。単斜晶系および三斜晶系は整正多面体中には存在しない。また、整正多面体中にある（１）に属するものは結晶中には存在しない。

（終わり）