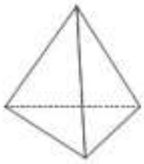
科学の甲子園ジュニア　　第1問

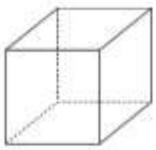
準備　正多面体模型，シール

サッカーボールを見てみよう。正五角形と正六角形が混じった立体である。このようないくつかの平面で囲まれた立体を「多面体」という。「多面体」には「頂点」と「辺」と「面」がある。全ての面が合同な正多角形で，どの頂点に集まる面の数も等しく，へこみのないものを「正多面体」という。正多面体は次の５種類しかないことが知られている。



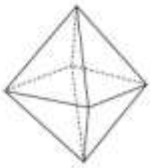
○正四面体

面の形と数	正三角形　4
辺の数	6
頂点の数	4



○正六面体

面の形と数	正方形　6
辺の数	12
頂点の数	8

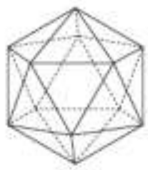


○正八面体

面の形と数	正三角形　8
辺の数	12
頂点の数	6

○正十二面体

面の形と数	正五角形　12
辺の数	30
頂点の数	20



○正二十面体

面の形と数	正三角形　20
辺の数	30
頂点の数	12

問１　辺で接する面同士を異なる色で塗る（以降は「塗り分け」という）ことを考える。各正多面体の塗り分けに必要な最小の色の数をそれぞれ求めよ。

⑴　正四面体　　⑵　正六面体　　⑶　正八面体

⑷　正十二面体　　⑸　正二十面体

問２　正 n 面体を n 色の色で塗り分けることを考える。ただし回転して形も色もぴったり重なるときは同じ塗り分け方と考える。

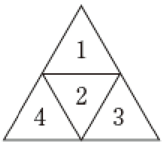
各正多面体の塗り分け方は何通りあるか。簡単な説明を付け加えよ。

⑴　正四面体　　⑵　正六面体　　⑶　正八面体　　⑷　正十二面体

問１

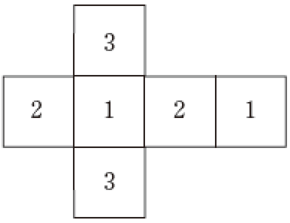
展開図を考えよう。

（1）



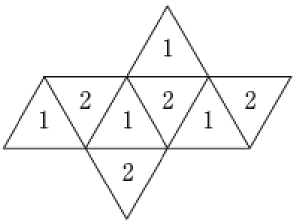
より<u>４色</u>

（2）



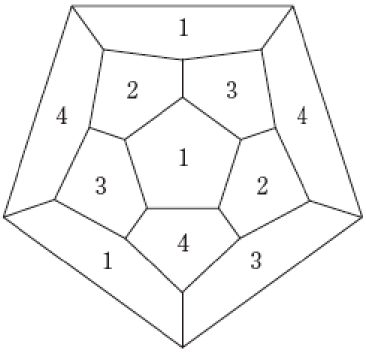
より<u>３色</u>

（3）



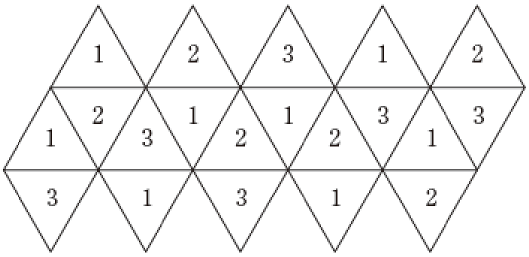
より<u>２色</u>

（4）



一面ぬいて平面におしつけると左図のようになる。
外は２とすることより<u>４色</u>

（5）



より<u>３色</u>

問２

⑴　４色のうち１色を底面に固定すると残りの３側面は回転による重なりを考えると２通り。

答　２通り

⑵　まず６色のうち１色を底面に固定する。

底面の対面の色は５通り

残った４側面の塗り分けは回転による重なりを考えて　$3\times2=6$（通り）

よって求める塗り分けの総数は　$5\times6=30$（通り）

答　30 通り

⑶　まず１つの面を底面として固定し，８色のうち１色をそれにあてる。

その対面の色は７通り

残りの６つの面の塗り分け方は　$6\times5\times4\times3\times2\times1$（通り）であるが，

底面に接する３面は回転して同じになる（重ねることができる）ので，

$\dfrac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{3}=240$（通り）

よって，求める塗り分け方の総数は　$7\times240=1680$（通り）

答　1680 通り

⑷　まず１つの面を底面に固定し 12 色のうち１色をそれにあてる。

その対面の色は 11 通り

残った 10 側面のうち固定した底面に辺を接する５つの面と接していない５つの面に分けて考えると，

辺を接する５つの面の１つを固定して考えることができるので，

塗り分け方は　$\dfrac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{5}=725760$

よって，求める塗り分け方の総数は　$11\times725760=7983360$（通り）

答　7983360 通り

（別解　１面を固定して考えると　$11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$（通り）だがその面に辺が接する面が５つあるので５で割って

7983360 通り

また 20 面体の場合は同様に考えて

$\dfrac{19\times18\times17\times\cdots\cdots\times3\times2\times1}{3}=40548366802944000$（通り）

である。）

【解説】

問 1 はいわゆる「４色問題」としてよく知られている問題である。つまり「いかなる平面上の地図も隣接する領域が異なる色になるように塗るには４色あれば十分だ」という定理である。（一面はずして平面上に押し付けて展開図を考えれば多面体の本問の場合も４色で十分であり，実際の答えを見てもそうであることがわかる。）

これは 19 世紀からなかなか証明できない数学の大難問の一つだったのだが，20 世紀に入りコンピュータの発達とともに状況が変わり，1976 年にコンピュータプログラムを利用してアッペルとハーケンが証明を行った。この４色定理は地図作製だけではなく，現在では携帯電話の基地局配置にも応用されている。

周波数が同じ電波同士で混信してしまう携帯電話システムで隣接する基地局には同じ周波数を割り当てないように配慮しており，これは結局地図の塗り分け問題と同じであることがわかる。理論的には周波数は４種類準備すればよいのである。

以下の図を４色を用いて塗り分けてみよう。

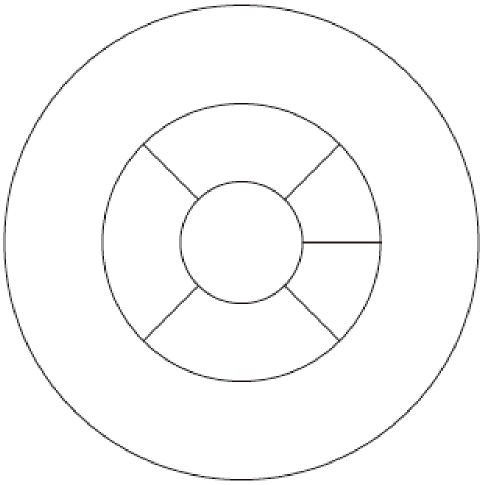


図 1

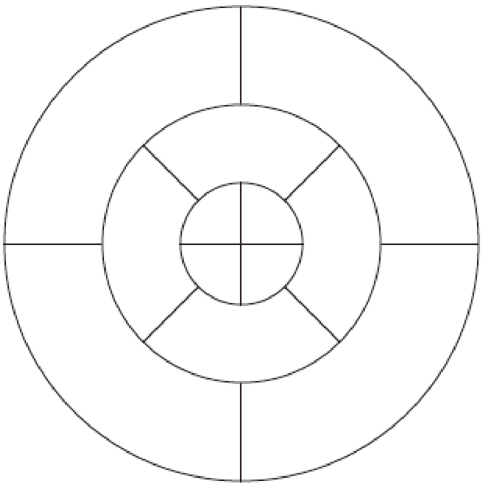


図 2

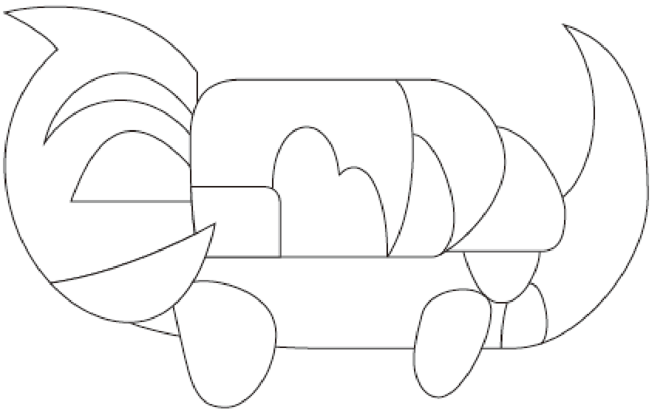


図３

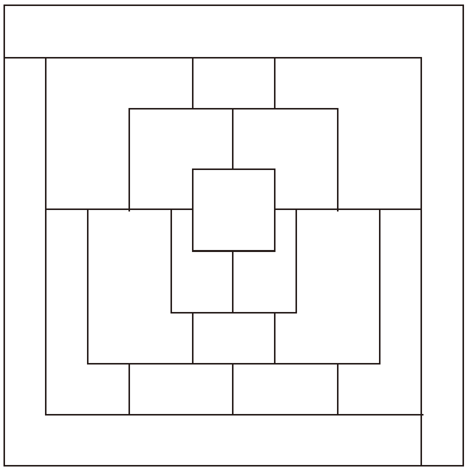


図４

以下は正多面体が正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の５種類しかないことを説明しよう。

正多面体の各面を正 p 角形，正多面体の頂点に集まる面の数を q とする。p 角形の内角の和は $(p-2)\times180°$（もちろん中学教科書で習う）より正 p 角形の各頂点の内角は

$\dfrac{p-2}{p}\times180°$ である。

正多面体の１つの頂点には q 個の正 p 角形が集まるとすると

$$\frac{p-2}{p}\times q\times180°<360°$$

つまり　$pq-2q<2p$　　さらに変形すると　$(p-2)(q-2)<4$

となり　$p=3$ のとき　$q=3,\ 4,\ 5$　　$(p,\ q)=(3,\ 3)$　（正四面体）

$(p,\ q)=(3,\ 4)$　（正八面体）

$(p,\ q)=(3,\ 5)$　（正二十面体）

$p=4$ のとき　$q=3$　　$(p,\ q)=(4,\ 3)$　(正六面体)
$p=5$ のとき　$q=3$　　$(p,\ q)=(5,\ 3)$　(正十二面体)
となる。

また，オイラーの定理（この事実も数学的に面白い）

頂点の数－辺の数＋面の数＝2

を用いても正多面体が5種類であることがわかる。

このオイラーの定理は，最初に述べたサッカーボールのように正多面体でない多面体においても成立するものである。

実際サッカーボールは正五角形の面の数＝12，正六角形の面の数＝20，辺の数＝90，頂点の数＝60である。実際のサッカーボールで数えてみるとよいだろう。以下正多面体として v 個の頂点，e 個の辺，f 個の面とすると，$v-e+f=2$ である。また各面が正 p 角形とすると，

$e=\dfrac{f\cdot p}{2}$　（1つの辺は2個の面に接している。）

また，1つの頂点に q 個の面が集まっているとすると，$v=\dfrac{f\cdot p}{q}$

$\therefore\quad \dfrac{f\cdot p}{q}-\dfrac{f\cdot p}{2}+f=2 \qquad \therefore\quad \dfrac{p}{q}-\dfrac{p}{2}+1=\dfrac{2}{f}$

これを f に関して解いて　$f=\dfrac{4q}{2p+2q-pq}$

よって，

$e=\dfrac{2pq}{2p+2q-pq},\quad v=\dfrac{4p}{2p+2q-pq}$

であることがわかる。すると $f>0,\ q>0$ より，$2p+2q-pq>0$

$\therefore\quad pq-2p-2q+4<4$　より　$(p-2)(q-2)<4$

となり，$(p,\ q)=(3,\ 3)$，$(3,\ 4)$，$(3,\ 5)$，$(4,\ 3)$，$(5,\ 3)$ となるのは前と同様である。

$(p,\ q)=(3,\ 3)$ のとき　$(f,\ e,\ v)=(4,\ 6,\ 4)$　(正四面体)
$(p,\ q)=(3,\ 4)$ のとき　$(f,\ e,\ v)=(8,\ 12,\ 6)$　(正八面体)
$(p,\ q)=(3,\ 5)$ のとき　$(f,\ e,\ v)=(20,\ 30,\ 12)$　(正二十面体)
$(p,\ q)=(4,\ 3)$ のとき　$(f,\ e,\ v)=(6,\ 12,\ 8)$　(正六面体)
$(p,\ q)=(5,\ 3)$ のとき　$(f,\ e,\ v)=(12,\ 30,\ 20)$　(正十二面体)

サッカーボールのような場合（準正多面体という）はもっと複雑になるが同様の考察ができるので調べてみよう。

問２は色が n 色のときの塗り分け方の総数の問題である。空間で回転して重なるときは同じ塗り方と考えるので回転でどう重なるか（数学でいう対称性）を考えることがポイントになる。このような対称性がどうなるかといったことも数学において重要な話題の一つで，「対称性」を調べる「現代数学」の分野は「群論」として現代も発展中である。かなり難しくはなるが，ルービックキューブで模様が何通りあるか？ などを考えると面白いと思う。

〈使用した多面体模型〉