正多面体と平行多面体の元素定理

秋山　仁，佐藤郁郎，中川　宏
東海大学・教育開発研究所　東京都渋谷区富ヶ谷 2-28-4
宮城県立がんセンター・研究所・病理　宮城県名取市愛島塩手字野田山 47-1
ja@jin-akiyama.com, sato-ik510@pref.miyagi.jp, okojyo@dk.pdx.ne.jp

Element Number of the Platonic and Fedorov's Solids

Jin AKIYAMA, Ikuro SATO, Hiroshi NAKAGAWA
Research Institute of Educational Development, Tokai University
Department of Pathology, Research Institute, Miyagi Cancer Center

Abstract: We introduce two fundamental results on regular polyhedra and parallelohedra. Namely,

a) Each member of Platonic solids can be constructed using congruent copies of four convex solids.

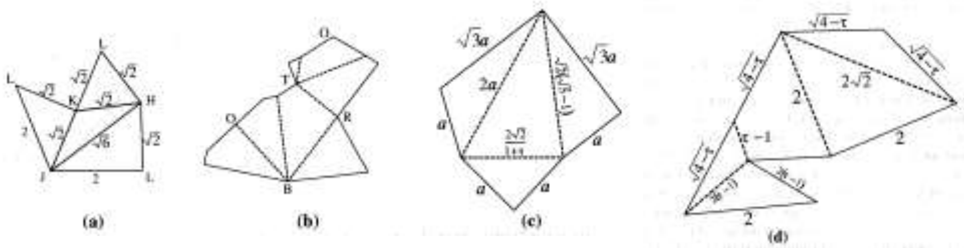
b) At least one member of each type of parallelohedron can be constructed using congruent copies of an unique pentahedron.

Keywords: element number, Platonic solids, Fedorov's parallelohedra, Pentadron

多面体といってもいろいろな種類がある．プラトン立体，アルキメデス立体，カタラン立体，フェドロフの平行多面体，ケプラー・ポアンソの星形正多面体，コクセター・ペトリーのねじれ正多面体，ジョンソン・ザルガラーの正多角面体などなど．本稿ではプラトン立体（正多面体）とフェドロフの平行多面体について，それぞれの「元素定理」を解説する．

１．正多面体の元素定理

正多面体に関する研究の歴史は長い．紀元前３世紀の頃（ユークリッドの時代），既に５種類の正多面体は知られていたが，未だ多くの興味深いテーマが手つかずである．例えば,「なるべく少ない種類の凸多面体ピースを使ってすべての正多面体を作ること」という問題を考えてみよう．結論を述べると，以下に示す４種類の凸多面体（これらを元素と呼ぶ）をα，β，γ，δとすると，正四面体はα_8，正２０面体はβ_{24}，正八面体は$\beta_{24}\gamma_{24}$，立方体は$\alpha_8\beta_{12}\gamma_{12}$，正１２面体は$\alpha_8\beta_{12}\gamma_{12}\delta_{12}$で構成することができる．

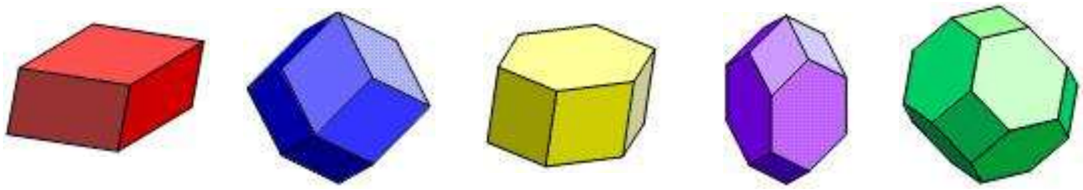


この構成法は best possible である．換言すれば，３種類以下の凸多面体をどのように接合しても５種類の正多面体すべてを構成することはできない．その数学的証明は参考文献[1]に譲り証明の本質を述べると，デーンの定理（１９０１年）の拡張にほかならない．

［**定理１**］ ５種類ある正多面体の元素数は４である．
また，この定理は高次元正多面体に一般化することも可能である[3]．
［**定理２**］ ６種類ある４次元正多面体の元素数は４である．
［**定理３**］ ３種類あるｎ(≧５)次元正多面体の元素数は３である．

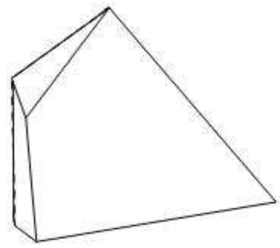
２．平行多面体の元素定理

フェドロフの平行多面体とは平行移動するだけで３次元空間を埋めつくすことのできる多面体である．それらは平行辺（平行四辺形面，平行六辺形面），平行面から構成されている多面体である．フェドロフの平行多面体には立方体，菱形１２面体，６角柱，長菱形１２面体，切頂８面体の５種類しかないことが証明されている（１８８５年）．



これら５種類の図形は３次元格子の幾何学的分類であり，５種類の正多面体（プラトン立体）ほどよく知られていないが，結晶学の観点からすると平行多面体は正多面体以上に重要であると考えられる．結晶格子には面心立方格子，体心立方格子，単純立方格子などの別があるが，面心立方格子のボロノイ領域は菱形１２面体，体心立方格子のそれは切頂８面体をなす．このように結晶の骨格の基本形はフェドロフの平行多面体に限定されるといってよいからである．そこで,「何種類かの凸多面体を用いて，すべての平行多面体を作りたい．その種類の最小数は何か？」という設問を考えてみよう．

当初，その決定は困難であると思われたが，予想に反してこれにはエレガントな結論があった．裏返し（鏡映対称）の多面体は同一視するが，平行多面体ではたった１種類ですべての平行多面体を作ることができるような凸多面体（これを元素とよぶ）が存在する．それを「ペンタドロン」と名付け，σで表すことにすると，立方体はσ_{96}．以下，菱形１２面体σ_{192}，６角柱σ_{144}，長菱形１２面体σ_{384}，切頂８面体σ_{48}となる．



［**定理４**］ ５種類ある平行多面体の元素数は１である．
この定理を高次元平行多面体に一般化することは興味深いが，容易ではない．

参考文献

[1] J. Akiyama, H. Maehara, G. Nakamura, I. Sato: Element Number of the Platonic Solids, Geom. Dedicata(2010), 145, 181-193
[2] J. Akiyama, M. Kobayashi, H. Nakagawa,, G. Nakamura, I. Sato: Atoms for Parallelohedra (to appear in “Intuitive Geometry”, Springer)
[3] J. Akiyama, I. Sato: The Element Number of the Convex Regular Polytopes (submitted)