

Figure 3.1a

ペンタドロン of 5つの面に上のような記号をふります。

ペンタドロン of 2分割したときの左右の立体の面数や形状をアクリル製の透明な模型を観察しながら調べてみました。

じっさいには合同ないし鏡像な立体への2分割のばあいには体積は等しいので、分割面は必ずペンタドロン of 重心を通りますが、ここではそれと無関係に形式的に分類します。

- 1、分割面が一つの面しか通らない場合。それは5面のうちのどれか一つの面が同時に分割面となることを意味しますので、ペンタドロン of 分割にはならず、ありえません。
- 2、分割面が2つの面をとおり、3つの面を通らない場合。分割面が通る面はそれぞれ2つずつにわかれ、残りの3面はかわりませんので、一方は4面体、他方は5面体になります。
- 3、分割面が4つの面を通り、一つの面を通らない場合。このときも分割面が通る面は2つずつにわかれ、残りの一つの面はかわりません。したがって一方は5面体、他方は6面体になります。

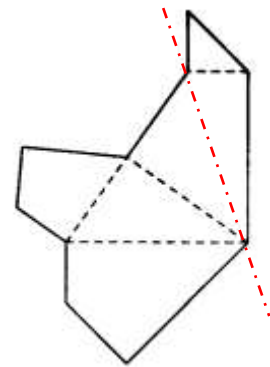
これらのことから、分割面が2面あるいは4面をとおるばあいには、合同体ないし鏡像体への分割の可能性はないとわかります。

- 4、分割面が3つの面を通り、2つの面を通らない場合。これには大きく分けて二つの場合があります。
 - a. 分割面がペンタドロン of 6つの頂点のいずれかを切りとるように通る場合。このとき頂点を含む立体は三角形4枚からなる4面体になります。ところがペンタドロン of には3枚の四角形面があり、どの一つの四角形面も残さないような分割面は存在しないの

で、他方の立体には必ず四角形面が含まれます。また面数も6となります。

- b. 分割面がA面とE面を通らず、BCD面を通る場合。この分割はこれまでのばあいにくらべればかなり有望です。分割後の左右の立体の面数はいずれも5面体。しかも三枚の四角形面であるBCD面をそれぞれふたつずつの四角形面において面角数を同じにするわけかたができます。しかしながらその場合には、左右2立体のそれぞれで分割面を共有する三角形面はもちろん合同ですが、他に一枚ずつある三角形面がA面とE面ですので、候補にはなりません。

残る可能性は、四角形面のどこかに大きなE面と同じ三角形を作ることができるかどうかで尽くすことができます。



展開図に書き入れたように赤い鎖線のところを分割面が通ればC面上にE面と同じ形の面をつくるのが唯一可能ですが、この面は分割後の2立体のE面を持つ立体と同じ立体の面になってしまいます。

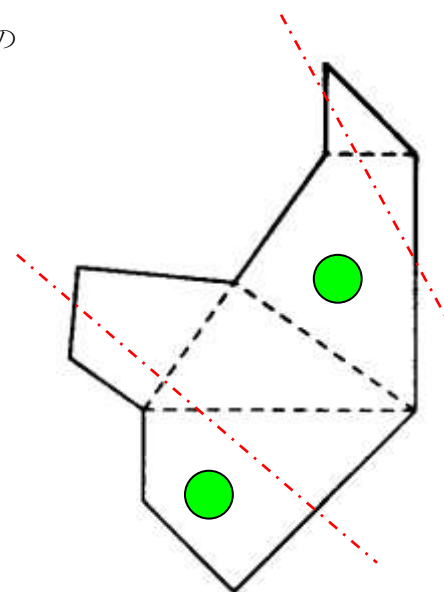
したがって3面を通る場合も可能性はありません。

5、5面すべてを分割面が通るばあい。

このばあいはもっともやっかいで、分割後の二つの立体はともに6面体、それぞれの面の角数もおなじ、8つの頂点に集まる3面の面角数の組み合わせもおなじです。そこでなにか手がかりはないものかと探しましたところ、この分割によってペンタドロンの表面に新たにできるふたつの五角形面の形状に着目すればいいことがわかりました。そのために一番小さな三角形面A面に注目して場合わけをします。

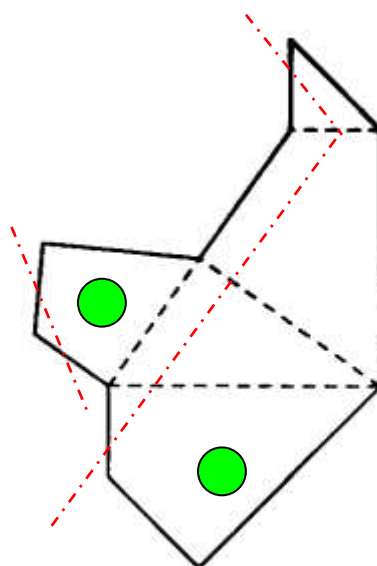
a. A面のふたつの短辺を分割面が通る場合（その1）。

緑色の丸印の面がそれぞれ五角形面となります。下の五角形面には少なくとも2個の直角がありますが、上の五角形面には一つの直角しかなく、分割面をさまざま移動させてみてもあらたに直角ができることはありません。（もしも赤い鎖線の左側のどちらかに直角ができると仮定すると、その右側も直角になるので、鎖線右側の三角形にはすでに直角が存在することと矛盾してしまいます。）したがってこの場合はふたつの五角形面は合同ではありません。



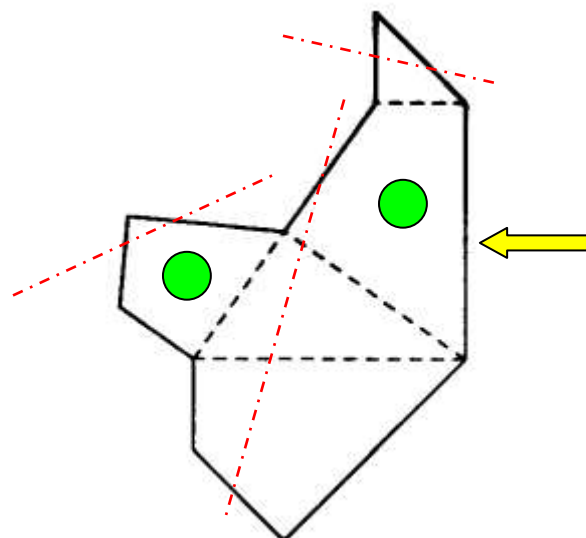
b. A面のふたつの短辺を分割面が通る場合（その2）。

緑色の丸印がともに五角形面です。上の五角形面には二つの直角がありますが、下の五角形面にはひとつの直角しかなく、赤い鎖線を移動させてもあらたに直角をつくることはできません。この場合もふたつの五角形面は合同になりません。

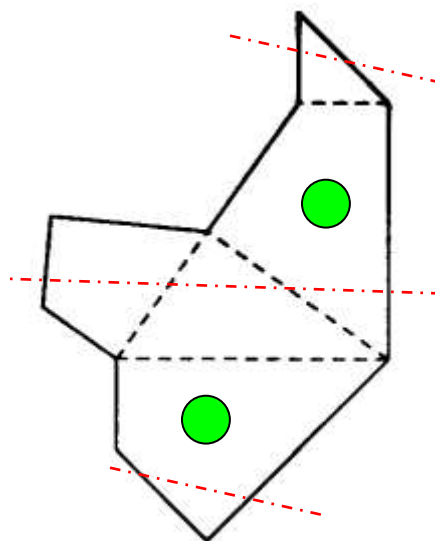


c. 右の図のようにA面の長辺と短辺を分割面が通る場合。（その1）

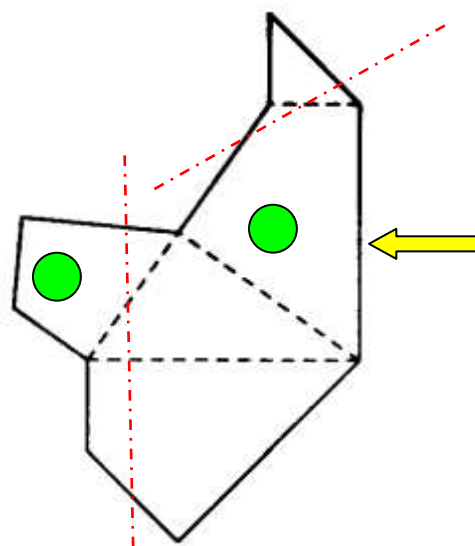
緑色の丸印がそれぞれ五角形面になります。右側の五角形面の右端の辺はペンタドローンのなかで二番目に長い辺ですが、左側の五角形面は最長の対角線でも黄色矢印の辺より短いので、左の五角形面に右の五角形面で最も長い辺があらわれることはありません。（ $4 : 2\sqrt{2}$ より小）



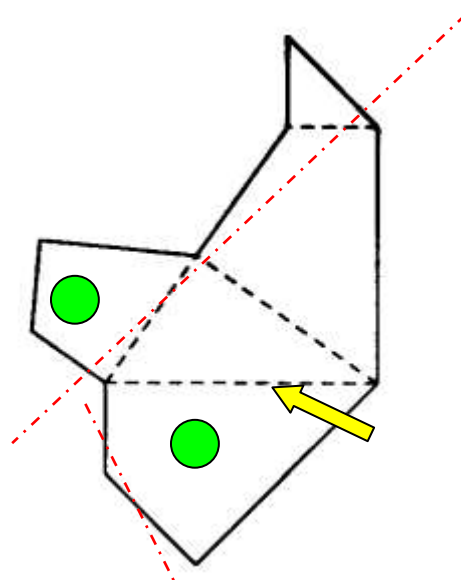
d、右の図のようにA面の長辺と短辺を分割面が通る場合。(その2)
 緑色の丸印がそれぞれ五角形面になります。
 上の五角形面にはすくなくとも二箇所の直角がありますが、下の五角形面には一つの直角しかなく、分割面を移動させてもあらたな直角をつくることはできません。



e、右の図のようにA面の長辺と短辺を分割面が通る場合。(その1)
 緑色の丸印がそれぞれ五角形面になります。
 この場合も、cのばあいと同様に、黄色矢印の辺の長さが左側の五角形のなかに現れることはありません。(4 : $2\sqrt{2}$ より小)



f、右の図のようにA面の長辺と短辺を分割面が通る場合。(その2)
 緑色の丸印がそれぞれ五角形面になります。
 この場合も、cのばあいと同様に、黄色矢印の最長の辺の長さが左側の五角形のなかにあらわれることはありません。
 ($3\sqrt{2}$: $2\sqrt{2}$ より小)



以上でペンタドローンの二分割のすべてのパターンわけは尽くされ、どのように2分割しようとも、合同体あるいは鏡像体に二分割することは不可能であることが証明されたと考えます。