

Pontryagin 生誕 100 年記念国際会議

Differential Equations and Topology

2008 年 6 月 17 日～6 月 22 日

主催：ロシア科学院 Steklov 数学研究所
モスクワ工科大学

秋山仁 小林みどり

中川宏 中村義作 佐藤郁郎

1. Introduction

- ・本論文では、断りのない限り、多面体は凸であるとする。
- ・多面体 P と Q が**合同**とは、 P と Q が全く同じ形であるか、または鏡映であることである
- ・多面体 P が**非分割的** (indecomposable) であるとは、 P を 2 個以上の合同な多面体に分割できないことである。
- ・非合同な多面体 P_1, P_2, \dots, P_n の集合 Π とする。

$$\text{i.e. } \Pi = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$$

非合同な非分割的多面体 e_1, e_2, \dots, e_m の集合を E とする。

$$\text{i.e. } E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}, \forall e_i \text{ は非分割的、} e_i \text{ と } e_j \text{ は非合同 (} i \neq j \text{)}$$

このとき、 E が Π の元素集合 $E(\Pi)$ であるとは、

$$\text{任意の } i \text{ (} 1 \leq i \leq n \text{)} \text{ に対し、} P_i = \sum_{i=1}^m a_i e_i, a_i \text{ は非負整数}$$

すなわち、 Π に属するどの多面体 P_i も、 E に属するいくつかの非分割的多面体の組み合わせによって構成されている。換言すれば、どの P_i も E のいくつかの要素へ分割できる。

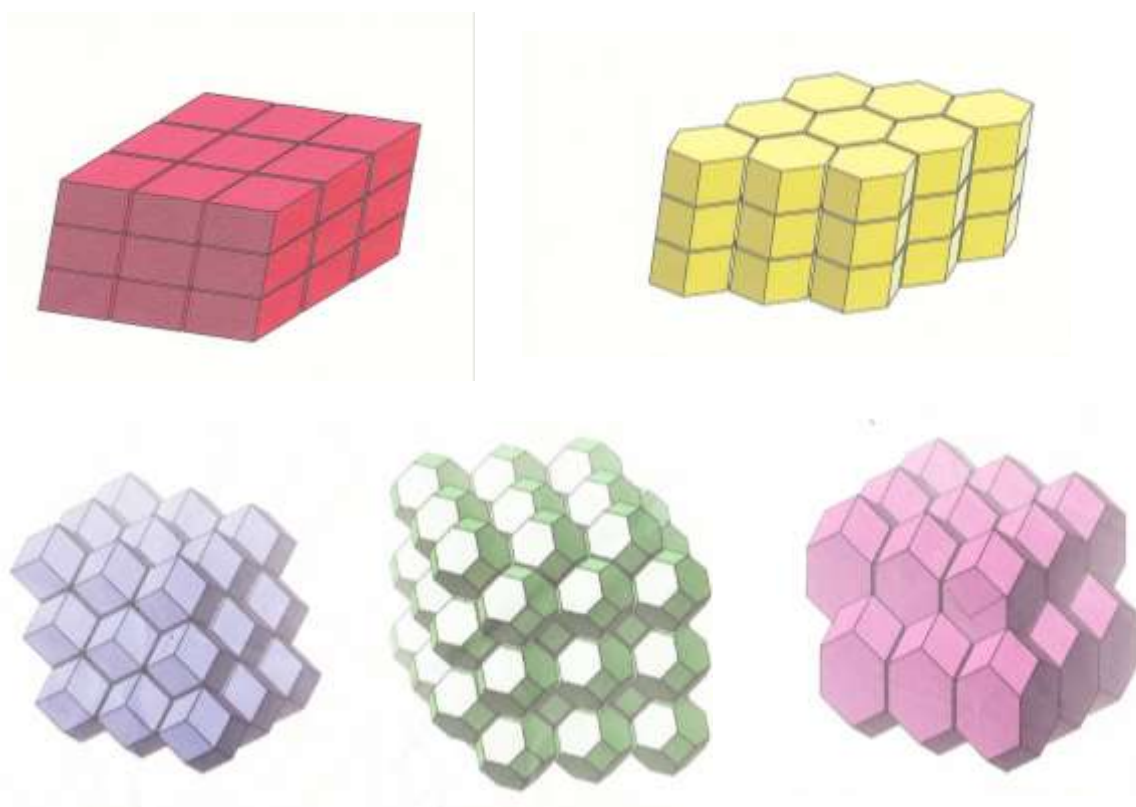
- ・ Π の**元素数 (element number)** $e(\Pi)$ とは、 Π に対する種々の元素集合の中で、位数の最小数を言う。即ち、

$$e(\Pi) = \min |E(\Pi)|, \text{ここに } \Pi \text{ に対するすべての可能な元素集合に関して } \min \text{ を取る。}$$

2. フォードロフの平行多面体の元素集合と元素数

フォードロフの平行多面体は平行六面体、斜六角柱、菱形十二面体、切頂八面体、長菱形十二面体の 5 種類の凸多面体である (図 1)、これらの立体に共通する性質は、どれも 1 種類の立体の空間を隙間なく充填する立体であるばかりでなく、それぞれの立体で空間を充填したとき、どの 2 個の立体も平行移動だけで重ねられるという著しい性質を持つことである。

図 1



定理 1 $\Pi_1 = \{\text{Fedrov の平行多面体}\}$ とする。
 $e(\Pi_1) = 1$ であり、 $E(\Pi_1) = \{\sigma\text{-dron}\}$ (図 2)

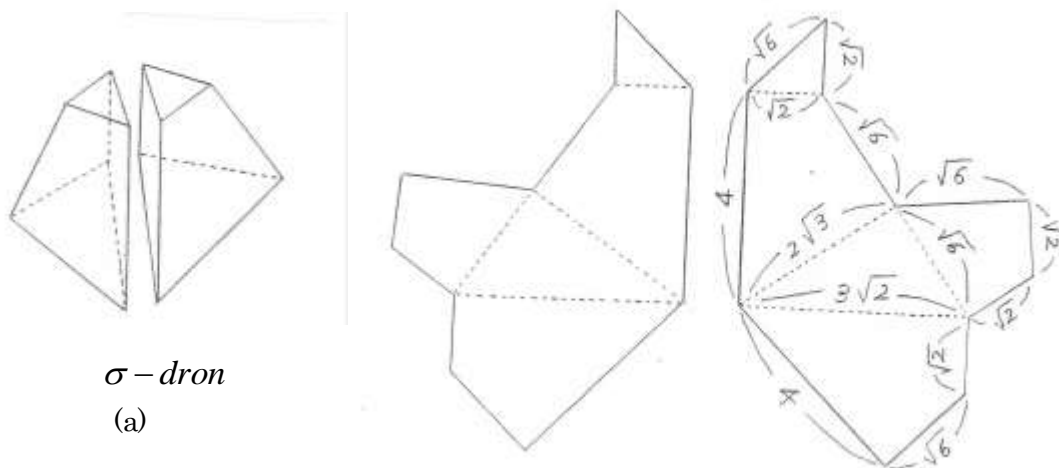


図 2 $\sigma\text{-dron}$ の展開図

証明

(Step1) 立方体と菱形 12 面体の共通な構成要素について

図 3(a)の立方体にたいし、立方体の中心と 2 本の対辺を通過する 6 枚の平面によって、図 3(b)のように、6 個の合同な四角錐に切り分ける。すると、この四角錐は、図 4(a)のように、底面が正方形、4 個の側面が合同な二等辺三角形となる。このため、底面の正方形の 2 本の対角線を通るようにして、四角錐の頂点から、2 枚の垂直面で切り分けると、図 4(b)のように 4 個の合同な三角錐が得られる。この三角錐のひとつの頂点に直角三角面が 3 個集まっているので、この三角錐を **Right Tetra** と呼ぶ。これは、立方体をうまく切り分けると、24 個の合同な **Right Tetra** に分かれることを示している。ところが、図 3(a)の立方体の 6 個の面に図 4(a)の四角錐をそれぞれ 1 個ずつ載せると、菱形十二面体となる。このことは、48 個の合同な **Right Tetra** から菱形十二面体も構成できることを示す。こうして、図 4(b)の **Right Tetra** は立方体と菱形十二面体の共通な構成要素となる。

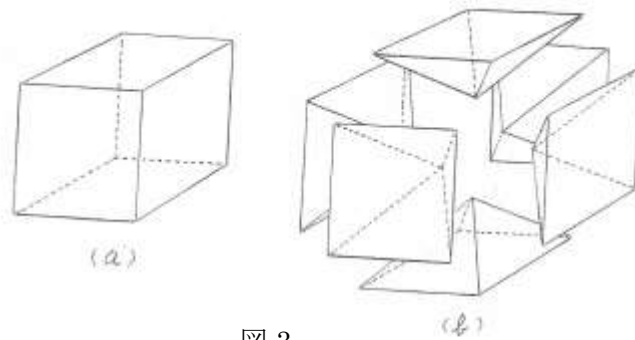


図 3

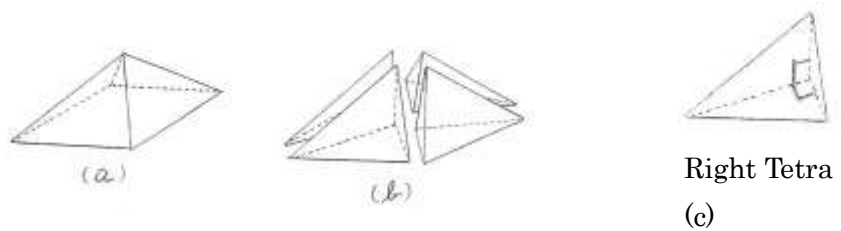
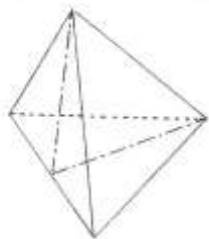


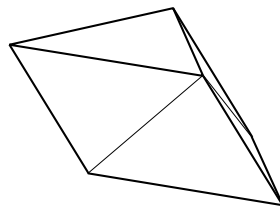
図 4

(Step2) 斜六角柱と長菱形 12 面体の共通な構成要素について

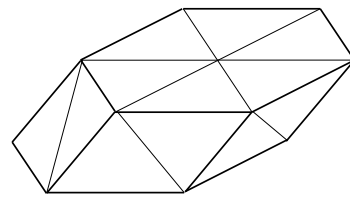
つぎは、斜六角柱と長菱形十二面体の構成要素に移る。図 4(b)の **Right Tetra** の底面は直角二等辺三角形なので、2個の **Right Tetra** をこの面で抱き合わせると、図 5 (a) に示すように、別な三角錐に変身する。ここに、鎖線は2個の直角三角錐の接着面を表す。この三角錐は **tetrapak** と呼ばれ、自己拡大型と呼ばれる著しい性質を持つ。それは、**tetrapak** を8個、うまく組み合わせると、各辺の長さがちょうど2倍の相似な三角錐に拡大できるという性質で、これから空間充填立体になることが簡単に求められる。しかも、**tetrapak** を3個、うまく組み合わせると、垂直な断面が正三角形となる三角柱(プリズム)も構成できる。そこで、三角柱と鏡映対称な三角柱を3個ずつ、上下の面が平行六角形になるように調整しながら組み合わせると、フォードロフの斜六角柱になる。また、**tetrapak** を48個、各面がぴたりと重なるように組み合わせると、長菱形十二面体も現れる。こうして、図 5 の **tetrapak** は斜六角柱と長菱形十二面体の共通な構成要素となる。



Tetrapak
(a)



斜六角柱
(b)



長菱形十二面体
(c)

(Step3) c-Squadron

ところで, tetrapak は, 次の性質を持つ. 図 6(a)のように, tetrapak の 6 本の辺の中点を通るようにして, 各辺を垂直に切り分けると, 図 6(b)のように, 4 個の合同な六面体に分かれる. この六面体を c-squadron と呼ぶ. ところが, この 4 個の六面体を組み替えると, 図 7(a) の九面体に変身できるので, 表面に正方形と正六角形が現れるよう調整しながら, 6 個の九面体を互いに抱き合わせると, 図 6(b)のように切頂八面体となる. こうして c-squadron は切頂八面体の構成要素となる.

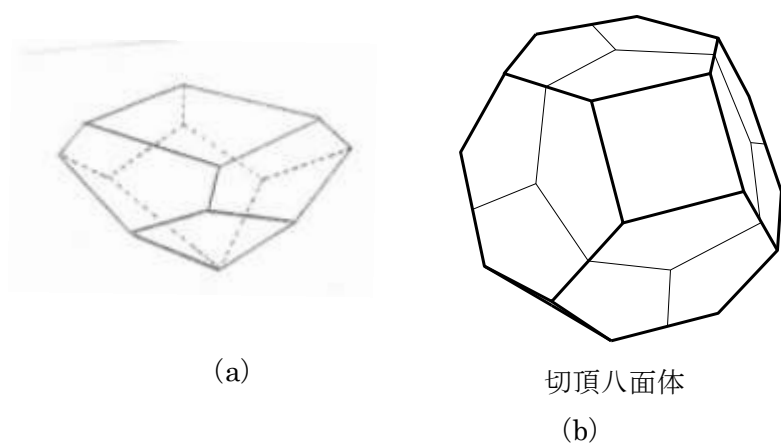
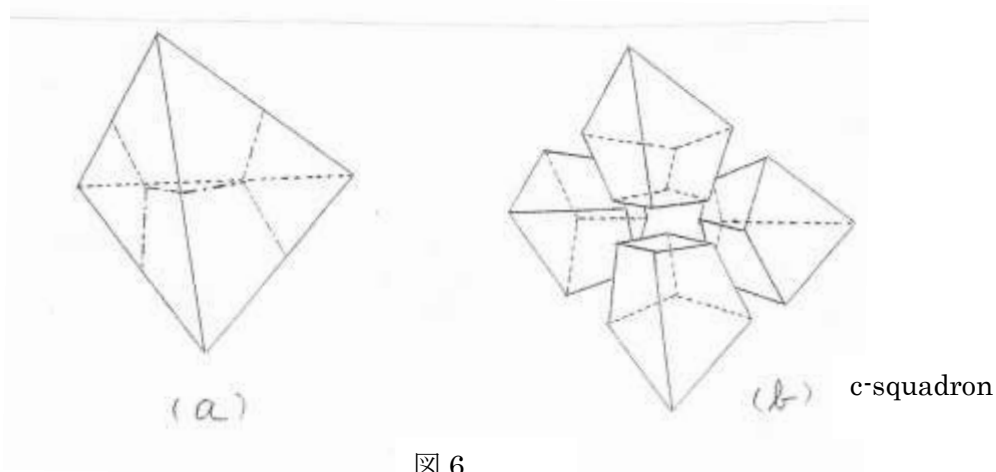


図 7

(Step4)

これまでの考察によって、立方体は **right tetra** が 24 個，菱形十二面体は **right tetra** が 48 個，斜六角柱は **tetrapak** が 18 個，長菱形十二面体は **tetrapak** が 48 個，切頂八面体は **c-squadron** が 24 個でそれぞれ構成されることが分かった。このため，残る問題は，3 種の多面体 **right tetra** と **tetrapak** と **c-squadron** に共通するが構成要素が存在するかどうかを調べることである。これにたいしては，まず図 8(a)の **c-squadron** が左右対称な立体であることに着目して，図 8(b)のように，これを合同な 2 個の五面体に切り分ける。この五面体を σ -*dron* と呼ぶ。すると，図 8 (c)のように， σ -*dron* が 4 個で **right tetra**, 8 個で **tetrapak** がそれぞれ構成できる。つまり， σ -*dron* はフョードロフの 5 種類の空間充填立体の共通の構成要素になっているのである。しかも，簡単な考察から，これをいくつかの合同な立体に切り分けようとしても，不可能なことが示される。こうして， σ -*dron* がフョードロフの多面体の族の元素である。なお，図 2 には， σ -*dron* の展開図を寸法入りで示してある。

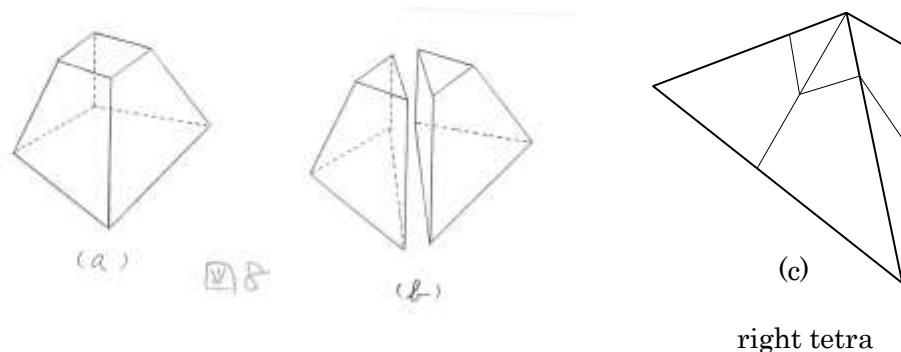


図 8

これまでの考察によって，立方体は 96 個の σ -*dron*，菱形十二面体は 192 個の σ -*dron*，切頂八面体は 48 個の σ -*dron*，斜六角柱は 144 個の σ -*dron*，長菱形十二面体は 384 個の σ -*dron* で構成されることが導かれた。(QED)

Remarks

うえの方法では，96 個の σ -*dron* で立方体を構成したが，わずか 24 個の σ -*dron* でも立方体が構成できる。しかし，これはあくまでも結果論であって，意図して得られた結果とはいえないので，本文からは割愛した。

3. 正多面体の元素集合と元素数

正多面体の元素集合と元素数を決定するために、まず、5種類の正多面体、正4面体、立方体、正8面体、正12面体および正20面体の間の構造的関係を考察する。

3.1 立方体と正四面体と正八面体の関係

最初は立方体の切り分けである。図1(a)のように、立方体の上面の正方形を ABCD、底面の正方形を EFGH として、3頂点 A、C、F を通る平面でこの立方体を切り、図1(b)のように、頂点 B を含む三角錐 BACF を切り離す。この三角錐 BACF を“Corner”と呼ぶ。すると、この断面は正三角形なので、同じ方法で頂点 D、E、G を含む三角錐もそれぞれ切り離すと、残った立体 ACGH は正四面体になる。図1(a)の6本の鎖線は、この切り分けで得られた正四面体を示す。

つぎに、切り離された4個の三角錐を見ると、底面は正三角形、側面は直角二等辺三角形となっている。このため、これらの三角錐の頂点 B、D、E、G を1点に集め、底面が正方形になるように調整すると、図1(c)のように、4個の側面がすべて正三角形の四角錐となる。このため、この四角錐を2個作り、底面の正方形を抱き合わせると正八面体となる。この切り分けで、立方体と正四面体と正八面体の間の1つの関係が得られた。

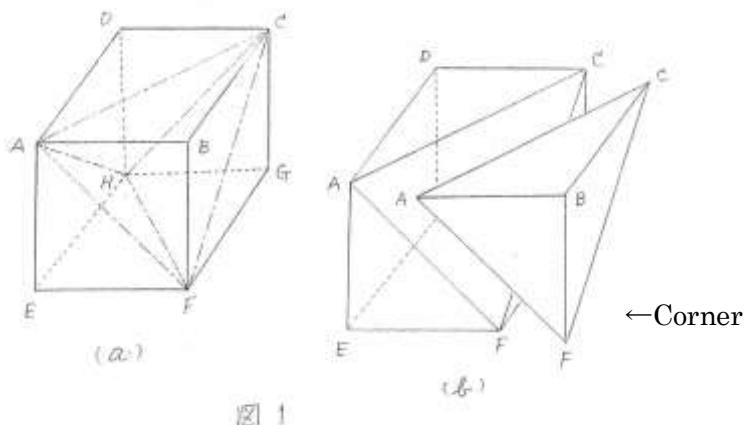


図1

3.2 正二十面体

つぎに、図1(b)のCorner BACFに着目し、図2(a)のように、3辺 AB、AC、AF 上に3点 Q、T、U をそれぞれ

$$AQ : QB = TC : AT = AU : UF = 1 : \tau$$

の割合でとる。ここに、 τ は黄金比とする。

次に、図2(b)のように、この三角錐から頂点 A を含む三角錐 QAUT を切り離す。この三角錐 QAUT を“Golden Tetra”と呼ぶ。

同じ方法で、図3(a)、(b)のように、頂点 C、F を含む三角錐もそれぞれ切り離すと、中央に七面体が残る。ここに、3点 R、S、V はそれぞれ3辺 CB、FB、FC 上に

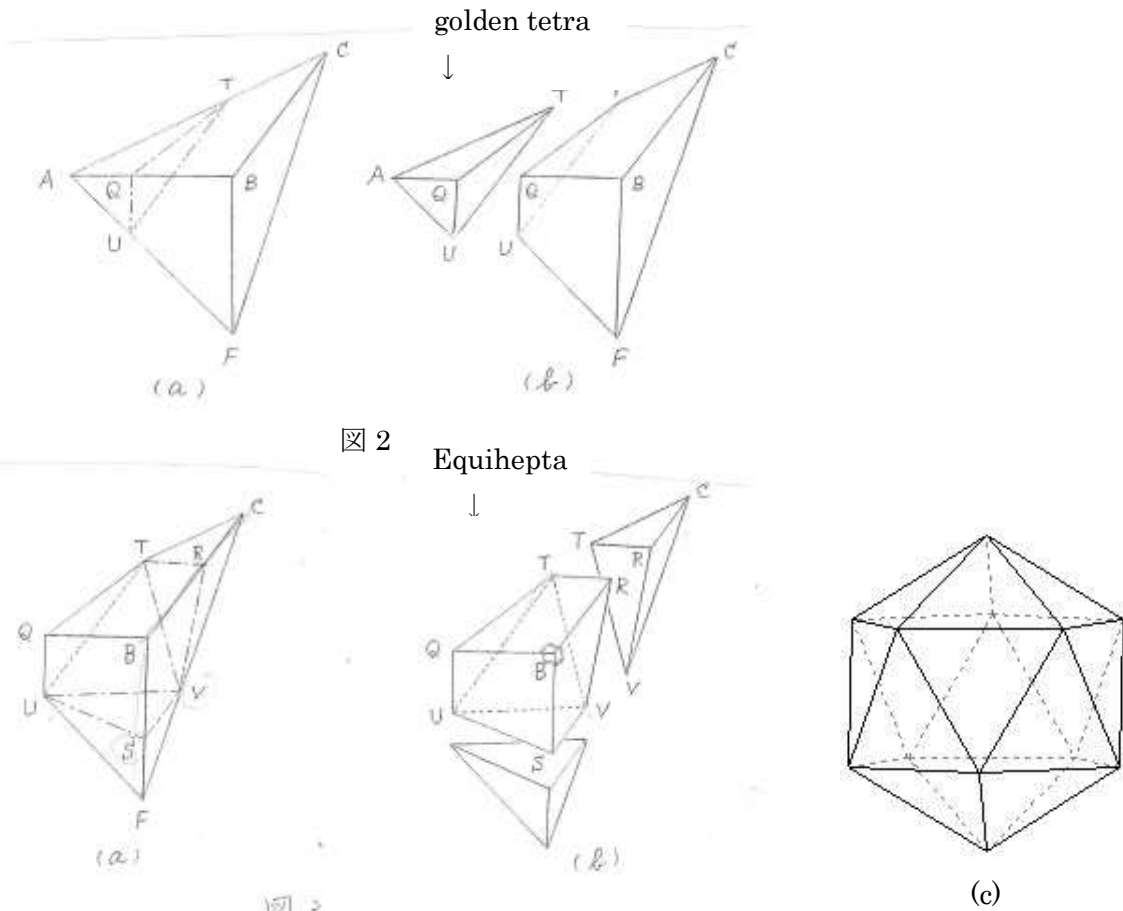
$$CR : RB = FS : SB = FV : VC = 1 : \tau$$

の割合でとる。この方法で作られた七面体 (図 3 (b)の中央) を“**equihepta**”と呼ぶ。この七面体はつぎの著しい特長を持つ。それは背面の三角形 TUV が正三角形、側面の 3 個の直角三角形 TQU, USV, VRT がすべて背面の正三角形を左右に 2 等分したときの左側の直角三角形と合同になるということである。

つぎに

$$\angle QBS = \angle RBQ = \angle SBR = 90^\circ$$

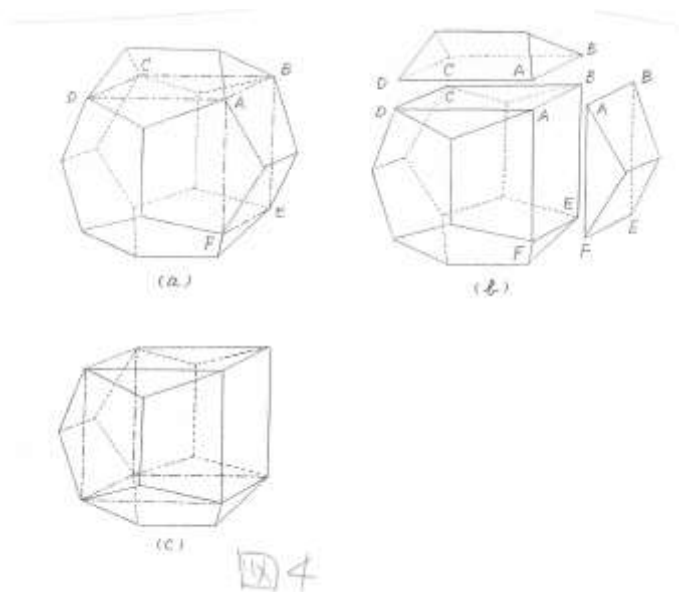
に着目して、この七面体と鏡映対称な七面体をそれぞれ 4 個ずつ作る。すると、それらを交互に抱き合わせると、ちょうど正二十面体 (図 3 (c)) になる。こうして、図 1(b)の Corner BACF と正二十面体の間の 1 つの関係が得られた。



3.3 正十二面体と立方体の関係

つぎに、図 4(a)の正十二面体に移り、図 4(b)のように、4 頂点 A, B, C, D を通る平面で上部を切り離し、4 頂点 A, B, E, F を通る平面で右部を切り離す。すると、2 つの断面は合同な正方形になり、切り離された 2 個の立体は合同な五面体になる。この五面体を **Roof** と呼ぶ。これと同じ方法で、図 4(c)の鎖線のように、さらに 4 個の平面で切ると、中央に立方体

が残る。よって、正十二面体は立方体と 6 個の合同な屋根から構成される。

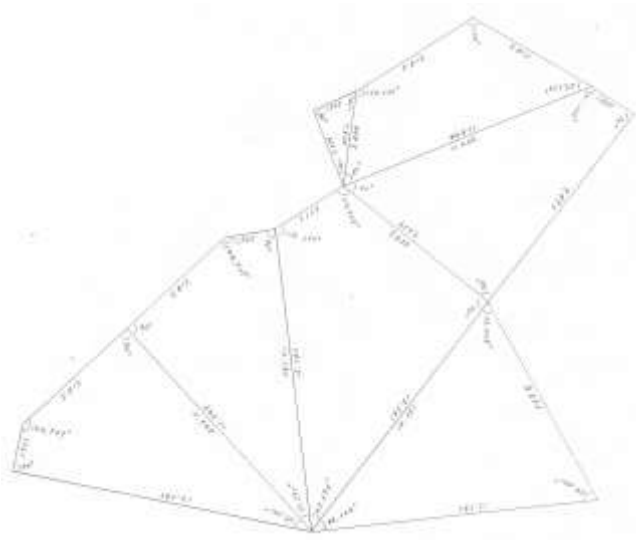
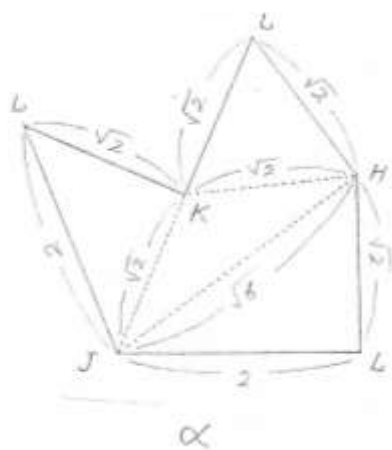


正多面体の間に成り立つ上述の考察より、次の定理を得る。

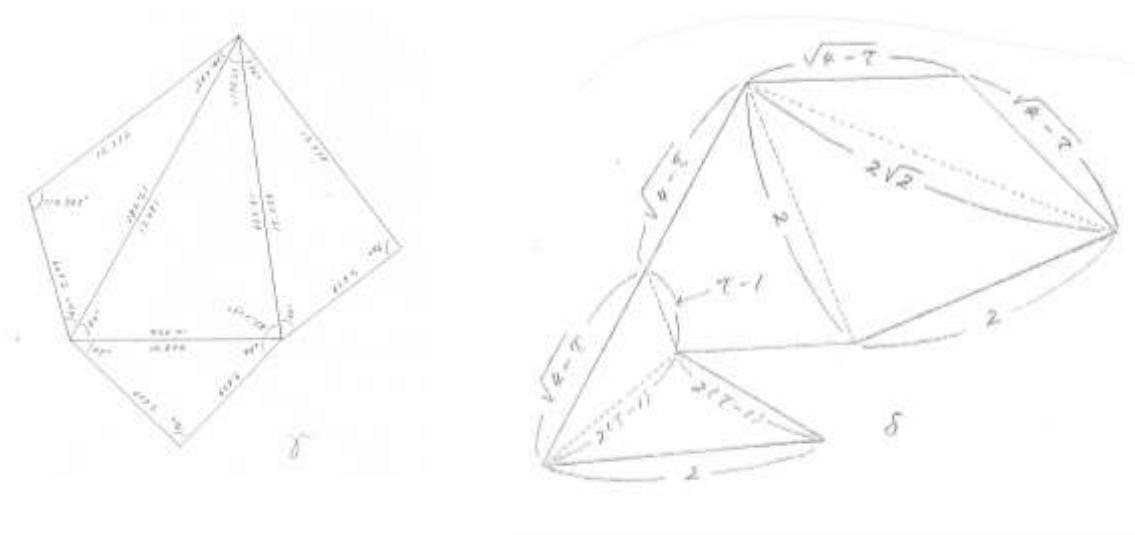
定理 2 $\Pi_2 = \{\text{正多面体の集合}\}$ とする

$$e(\Pi_2) \leq 4 \text{ であり、} E(\Pi_2) = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

ただし、立方体 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の展開図は以下のものである。



β



証明

上述の考察で、立方体の切り分けから正四面体と正八面体と正二十面体が得られ、正十二面体の切り分けから立方体を得られた。このプロセスで現われた多面体は次の 4 種であった。

- [1] 図 1(a)の鎖線の正四面体（正四面体と立方体と正十二面体に使用）
- [2] 図 3(b)の中央の七面体 **Equihepta**（正二十面体と正八面体と立方体に使用）
- [3] 図 2(b)の四面体 **Golden Tetra**（正八面体と立方体に使用）
- [4] 図 4(b)の五面体 **Roof**（正十二面体に使用）

となる。

これら 4 種の多面体が元素の条件をみたしているかを **check** し、そうでない場合は、さらに分割し、最終的に正多面体の族に対する、ひとつの元素集合を決定しよう。

(Step1) 元素 α

まず、[1] の正四面体を調べる。図 1(a)から抜き出したこの正四面体を図 5(a)の **ACFH** として、4 辺 **AF, FC, CH, HA** の中点 **I, J, K, L** を通る平面でこの四面体を切る。すると、図 5(b)のように、この断面は正方形（ペトリー図形）となり、切り分けられた 2 個の立体は合同なプリズム（三角柱）になる。図 5(c)はその一方のプリズムを取り出し、向きを変えて眺めたものである。

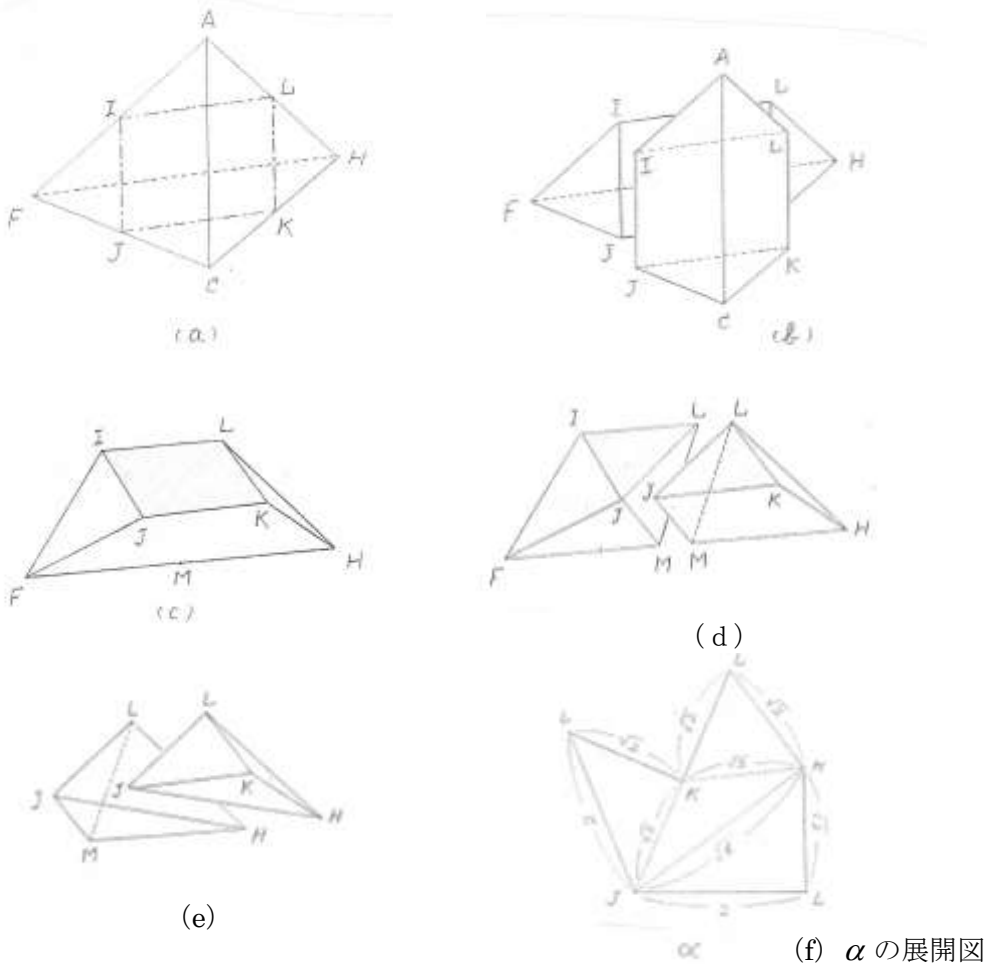


図 5

図 5 (d)のように、辺 FH の中点を M として、3 点 J, L, M を通る平面で切る。すると、この切り分けで、2 個の合同な 5 面体に分かれる。しかも、それぞれの 5 面体は左右に对称なため、右側の 5 面体をとると、図 5 (e) のように、さらに 2 個ずつの合同で、非分割的な四面体 $KJLH, MJLH$ に分けることができる。図 5 (f) は右側の四面体 $KJLH$ の展開図を示したもので、図 1 (a) の立方体の 1 辺の長さを 2 としたときの具体的な寸法も与えてある。以下では、この四面体を α と記し、正多面体を構成する 1 つの元素と考える。すると、正四面体は 8 個の元素で構成されるので、化学の分子式のように、これを α_8 と記すことができる。

Step 2- 元素 β

[2] の七面体 **Equihepta** を調べる。図 3 (b) の中央に示されたこの七面体は、正三角形 TUV を底面、点 B を頂点とすると、3 回割りの回転対称性を持っている。このため、正三

角形の中心をOとすると、Oを通過して 120° ずつに分かれた3枚の面で垂直に切り下ろせば、つねに合同な3個の七面体に分かれる。そこで、底面の正三角形が図6(a)のように切り分けると、その展開図は図6(b)となる。ただし、式による表現は煩雑なので、この展開図を求める粗い過程を Appendix の補図に示す。

以下では、この非分割的七面体を β と記し、正多面体を構成する1つの元素と考える。すると、正二十面体は24個の元素で構成されるので、これを β_{24} と記すことができる。

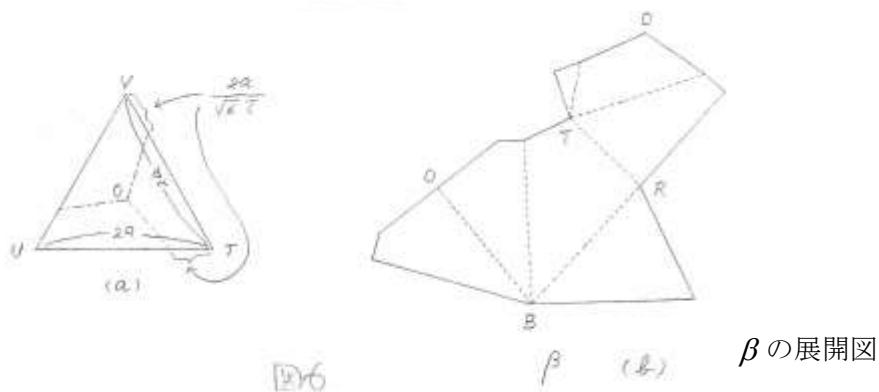


図6

β の展開図

Step3 元素 γ

つぎに、[3]の四面体 golden tetra を調べる。これは図3(b)の上部と下部にある四面体で、この四面体を何個かの合同な凸多面体に切り分けるのは不可能であることが容易に分かる。そこで、この四面体を γ と記し、元素として採用する。図7はこの四面体の展開図で、具体的な寸法も示してある。すると、正八面体は β と γ が24個ずつで構成されるので、 $\beta_{24}\gamma_{24}$ と記すことができる。また、図1(a)の立方体は、 α が8個、 β と γ が12個ずつで構成されるので、 $\alpha_8\beta_{12}\gamma_{12}$ と記すことができる。

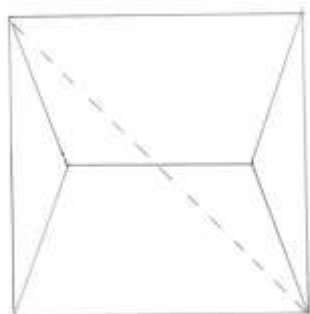


γ の展開図

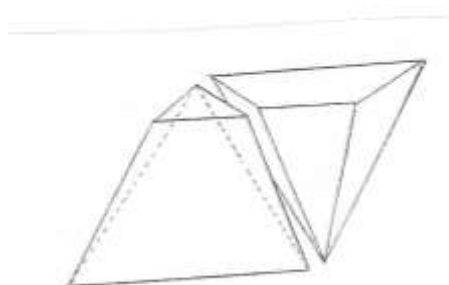
図7

Step4 元素 δ

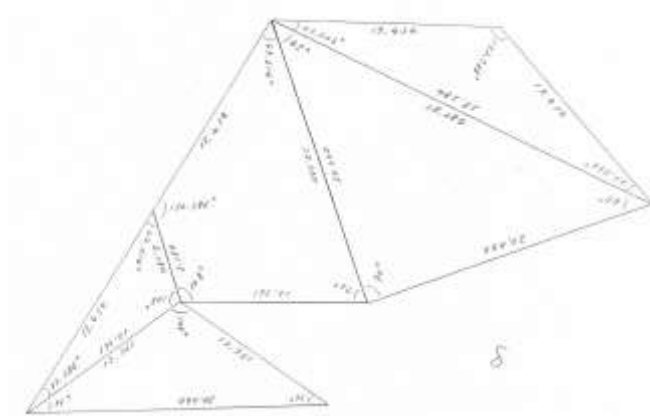
つぎに, [4]の五面体 Roof を調べる(図 8(a)). Roof には上下と左右に対称性があることを承知のうえで, 図 8(b)のように2個の合同な5面体に切り分ける. すると, この五面体は合同な2個以上の多面体に分割できないので元素として採用し, 記号 δ と記す. 図 8(c)はこの五面体の展開図で, 具体的な寸法も示してある.



(a) roof



(b) 元素 δ



δ の展開図

(c)

図 8

以上で、正多面体のいずれも、4種類の元素 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ で構成できることが分かった。各正多面体について、化学分子式のように表現すると以下ようになる：

- 正四面体 …………… α_8
- 立方体 …………… $\alpha_8 \beta_{12} \gamma_{12}$
- 正八面体 …………… $\beta_{24} \gamma_{24}$
- 正十二面体 …………… $\alpha_8 \beta_{12} \gamma_{12} \delta_{12}$
- 正二十面体 …………… β_{24}

となる。ただし、鏡映対称な元素にも同じ記号を使用した。もし、鏡映対称な元素にプライム記号(')をつけて区別すれば、

- 正四面体 …………… $\alpha_4 \alpha'_4$
- 立方体 …………… $\alpha_4 \alpha'_4 \beta_6 \beta'_6 \gamma_6 \gamma'_6$
- 正八面体 …………… $\beta_{12} \beta'_{12} \gamma_{12} \gamma'_{12}$
- 正十二面体 …………… $\alpha_4 \alpha'_4 \beta_6 \beta'_6 \gamma_6 \gamma'_6 \delta_{12}$
- 正二十面体 …………… $\beta_{12} \beta'_{12}$

となる。

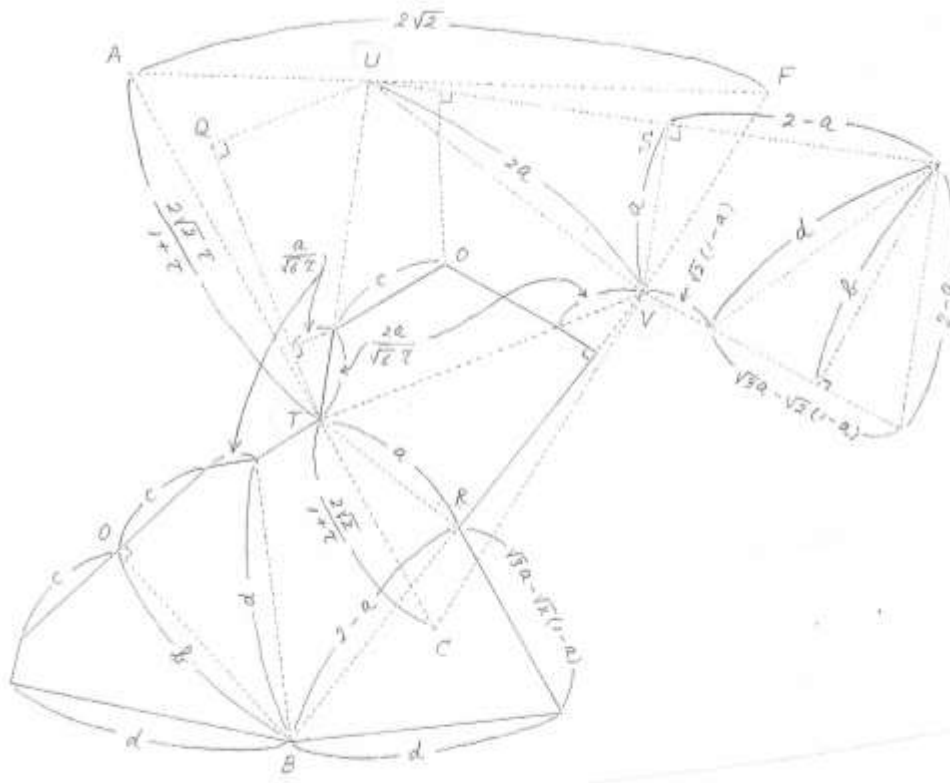
Appendix

β の展開図の求め方

図1(a)の立方体の1辺の長さを2とすると、鎖線で示した正四面体の1辺の長さは $2\sqrt{2}$ である。補図の正三角形ACFはこの正四面体の1つの面を再掲したものである。この正三角形の1辺の長さも $2\sqrt{2}$ である。すると、3点T, U, Vは3辺CA, AF, FCをそれぞれ $1 : \tau$ で内分した点なので、正三角形TUVの1辺の長さは、簡単な計算から $2a$ となる。ここに、

$$a = 3 - \sqrt{5} = 2(2 - \tau)$$

とおいた。つぎに、この正三角形を2等分した直角三角形を3個、図中のTQU, USV, VRTのように描く。また、正三角形TUVの中心をOとして、図6(a)の寸法で、Oから 120° ずつに分かれた3本の線を引く。そして、これらの端点から3辺TQ, US, VRに垂線を下ろす。ここまでの基本的操作で、その後も丁寧に説明すると冗長になる。このため、図中の寸法通りに作図を継承すれば、目的の展開図が自然と得られる。また、図中のb, c, dは煩雑な長さになるので、具体的な表現は割愛してある。



β

補図