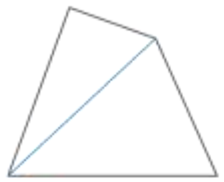
任意の四角形 定理集

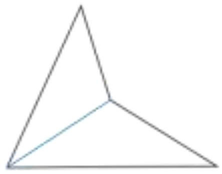
山﨑憲久

１．内角の和

任意の四角形の内角の和は４直角

三角形の内角の和は２直角であることから示される。

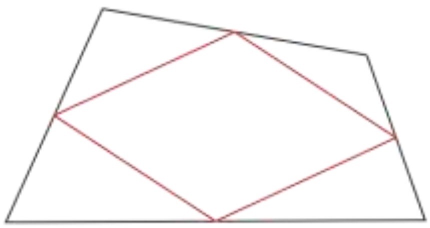


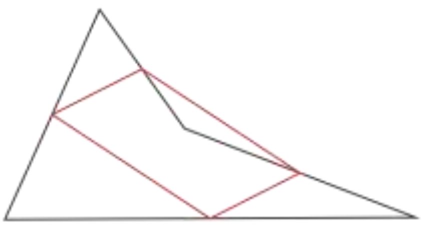


２．中線連結

任意の四角形の隣り合う辺の中点を順に結べば、平行四辺形が得られる。

対角線をとり三角形の中線連結定理を組み合わせて示される。

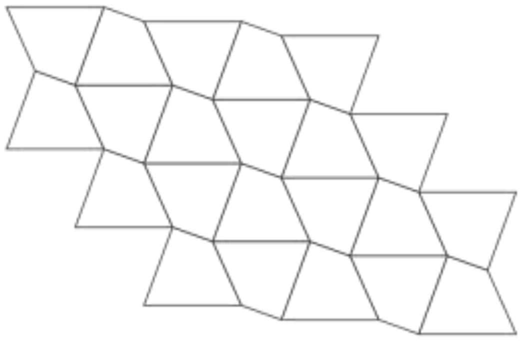




３．敷き詰め

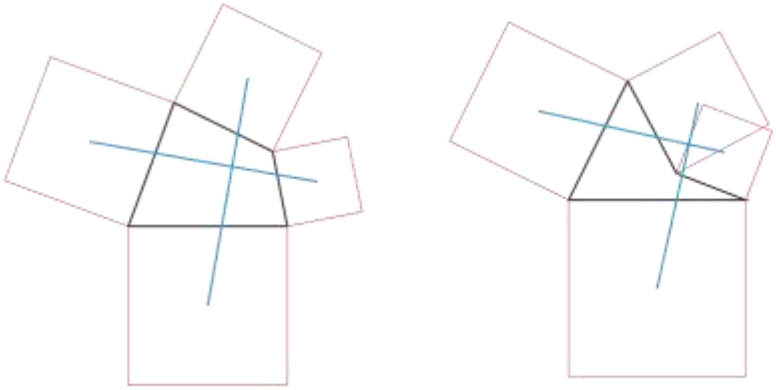
任意の四角形は隙間なく平面を埋め尽くすことができる。

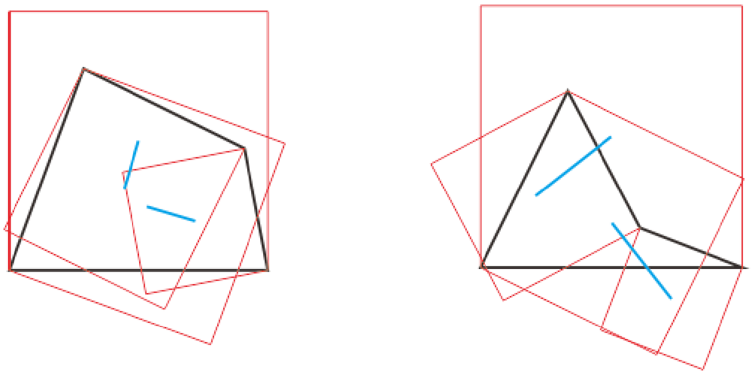
対角線をとり三角形の内角の和は２直角であることを組み合わせて示される。



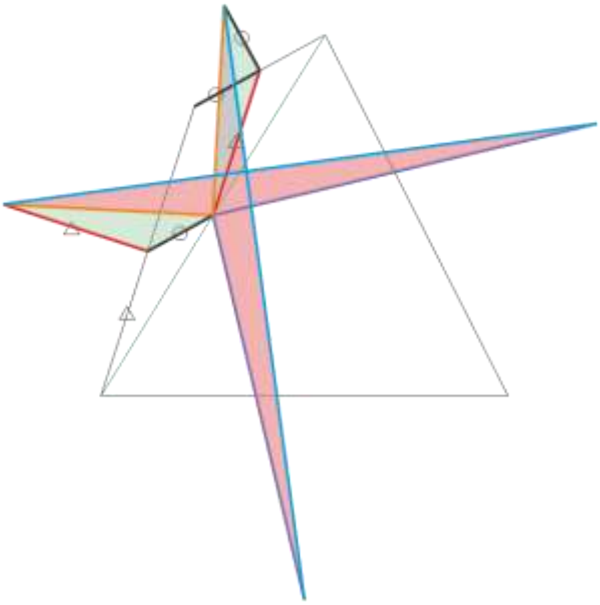
４．オーベルの定理

任意の四角形の各辺に等しい長さの正方形を外に向かって、あるいは内に向かって立てると、各正方形の中心を対辺どうしで結ぶ線分は、直交し、長さは等しい。

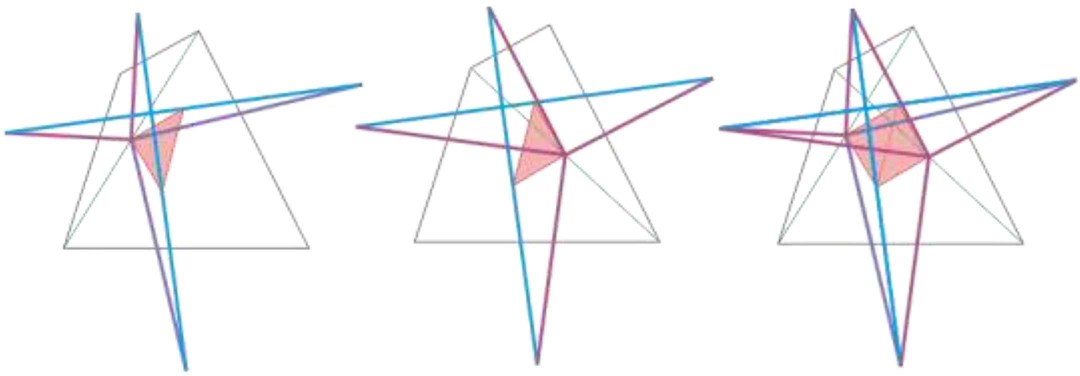




証明は、四角形の対角線の中点を一つ取り、それと正方形の中心をそれぞれ結ぶことによって、右図のように二組の三角形が合同で直交することから示される。



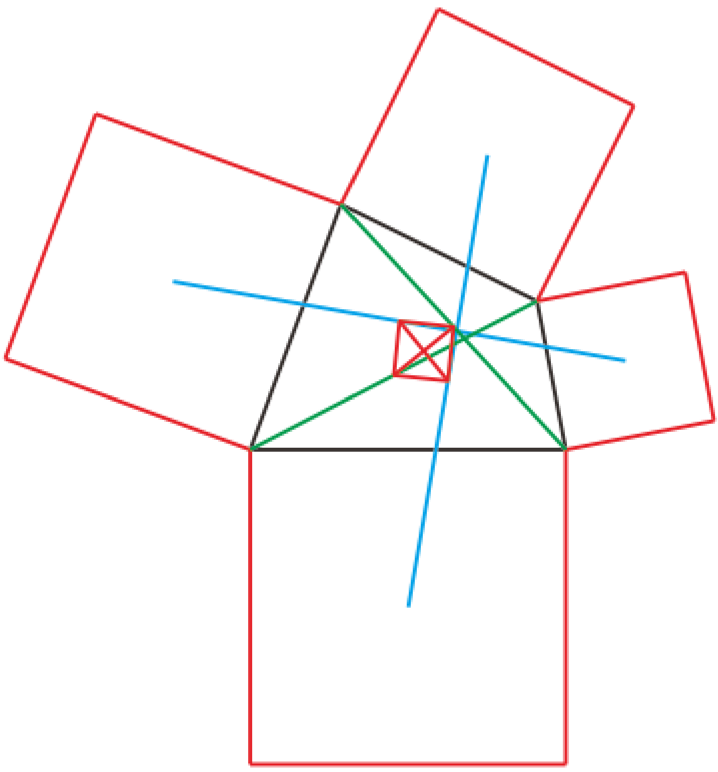
また、この図において、対角線の中点と向かい合う正方形の中心を結ぶ線分の中点２つとが直角二等辺三角形をなすことがたやすく見て取れる（下図左)。同じことはもう一つの対角線の中点と向かい合う正方形の中心を結ぶ線分の中点２つとの関係でもいえる（下図中)。



よって、

<S.Collings の定理>(1984)

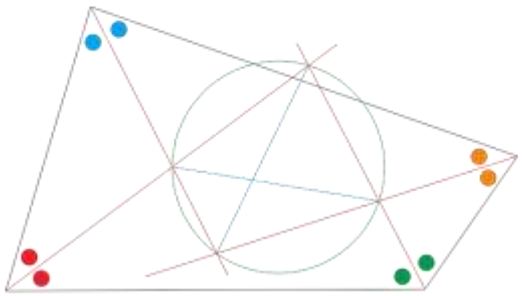
任意の四角形の対角線および対辺上に立てた正方形の中心を結ぶ線分それぞれの中点は、正方形をなす。

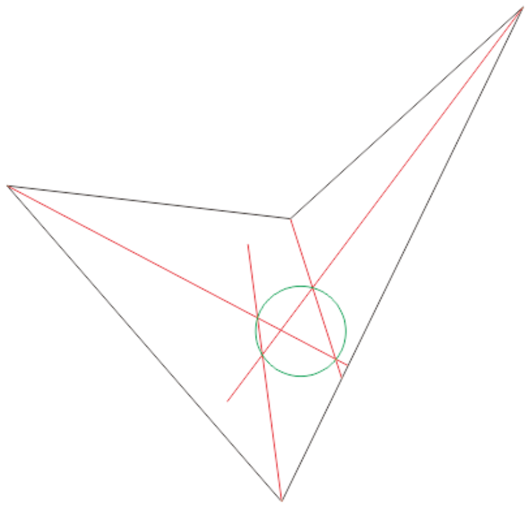


５．内角の二等分線の交点

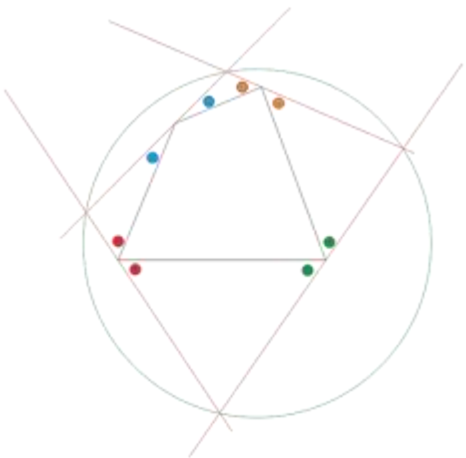
任意の四角形の隣り合う内角の二等分線の交点４つは、同一円周上にある。

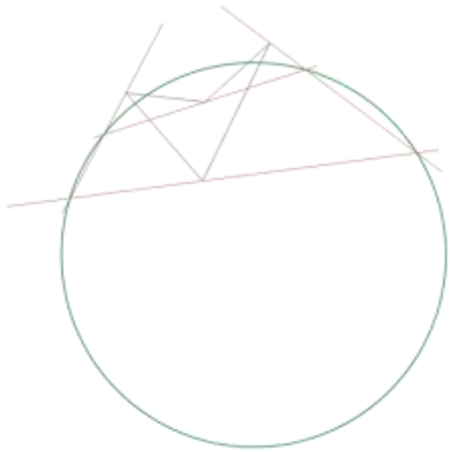
証明は、円に内接する四角形の対角の和が２直角であることから示される。





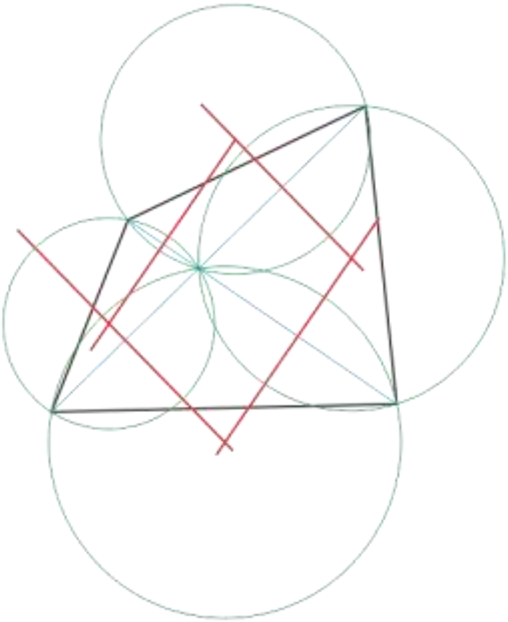
同様のことは、四角形の隣り合う頂点の接線（内角の二等分線に垂直）の交点を取っても得られる。

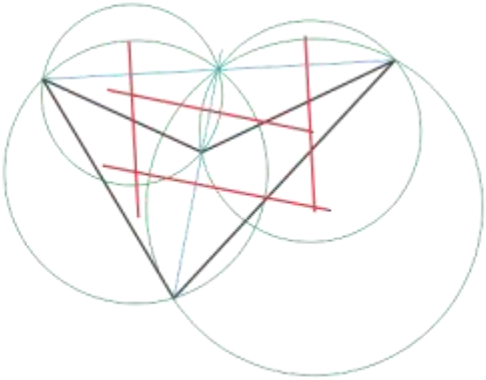




６．頂点と対角線の交点を通る円

任意の四角形の隣り合う２頂点と対角線の交点を通る円４つの中心は平行四辺形をなす。対角線上の同位角の一致から示される。



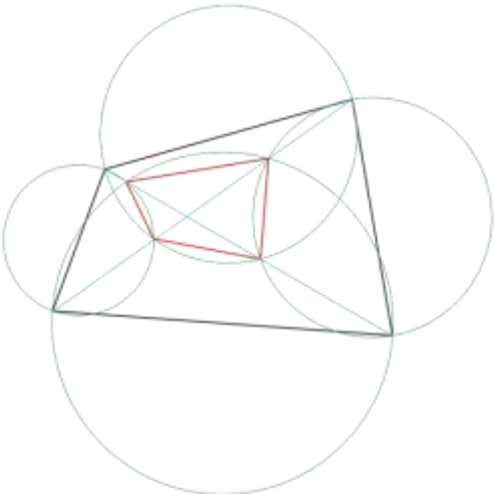


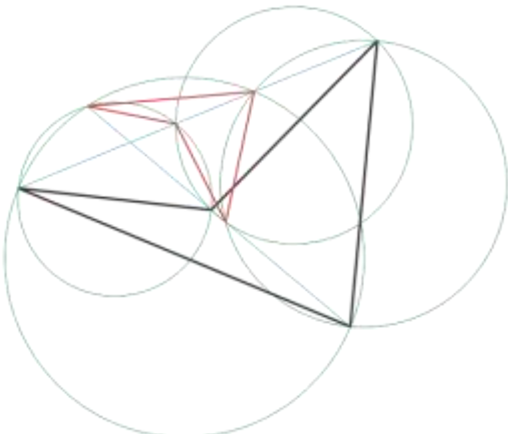
7．隣り合う辺を直径とする円の交点

任意の四角形の各辺を直径とする４つの円を描く。隣り合う辺上の円の２交点のうち、四角形の頂点ではない交点４つを、四角形の隣り合う辺を辿る順に結んでできる四角形は、元の四角形と相似（鏡像）である。相似比は１：$\cos\theta$（θは対角線の交差角）である。

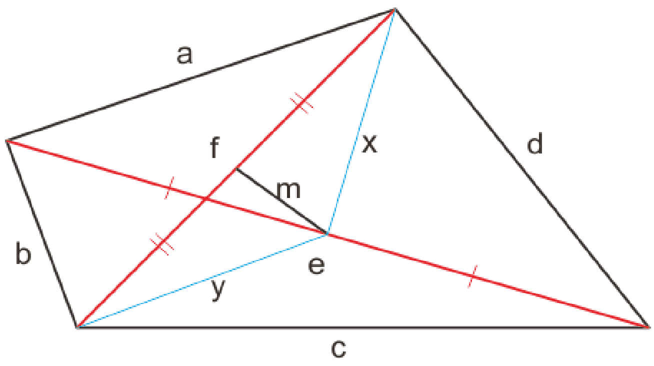
　また、その鏡像四角形の対角線は元の四角形の対角線と同一直線状にあり、それぞれの交点は一致する。

証明は、鏡像の四角形の頂点が元の四角形の頂点から対角線に下した垂線の足であること、および円周角の定理などから示される。





８．オイラーの定理
三角形の中線定理（パップスの定理）を任意の四角形に適用することによって、オイラーの四角形定理が導かれる。



四角形の対角線の長さをｅ、ｆ　、対角線の中点間の長さを　ｍ とする。

ｘを中線とする三角形について、
$4x^2 = 2a^2 + 2d^2 - e^2$
ｙを中線とする三角形について、
$4y^2 = 2b^2 + 2c^2 - e^2$
ｍを中線とする三角形について、
$4m^2 = 2x^2 + 2y^2 - f^2$

以上より、
$a^2+b^2+c^2+d^2 = e^2+f^2+4m^2$