和算にまなぶ（３）

「日本の数学―何題解けますか？[下]」（深川英俊・ダン・ソコロフスキー著）７６頁より

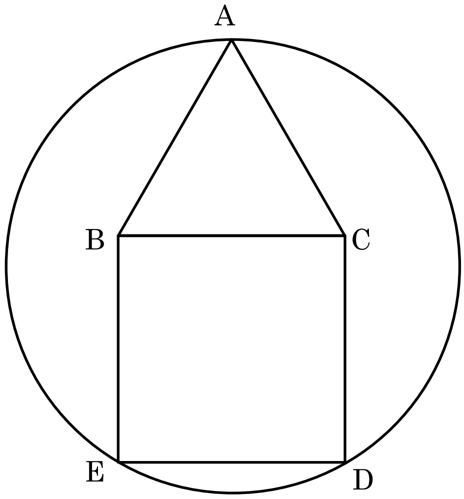
中川　宏

問題 9.10.1（「算法起源集」、佐久間纉、１８７７年）

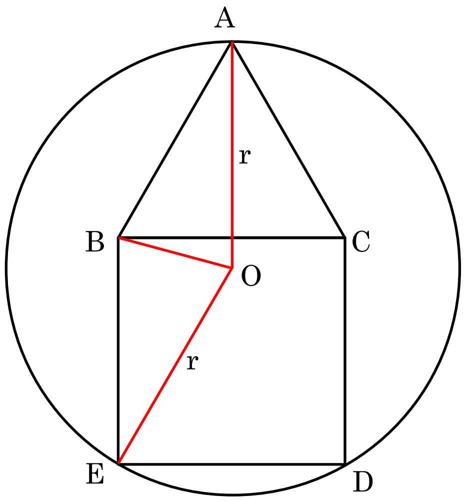
正三角形ＡＢＣの底辺ＢＣを一辺とする正方形ＣＢＥＤがある。

これに外接する円Ｏ（r）を描く。

このとき、r＝AB　を示せ。



解答（中川）



△ABO と△EBO において、

OA=OE=r

AB=EB

から三辺相同で、

△ABO≡△EBO

よって、

∠BOA=∠BOE

他方、EB∥OA より、

∠BOA=∠EBO

よって、

∠BOE=∠EBO

つまり△EBO は二等辺三角形なので、

EB=OE=r

ゆえに

AB=EB=r

感想（中川）

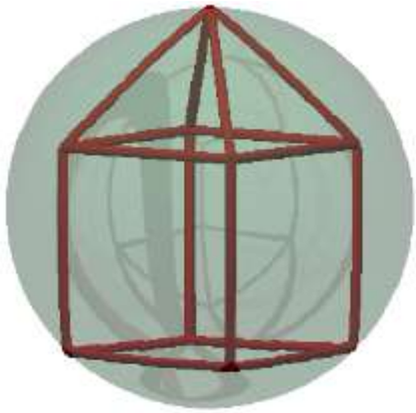
一辺がおなじ正三角形と正方形と、同じ半径をもつ円が接するとはなんともシンプルで美しい。

発展問題（中川）

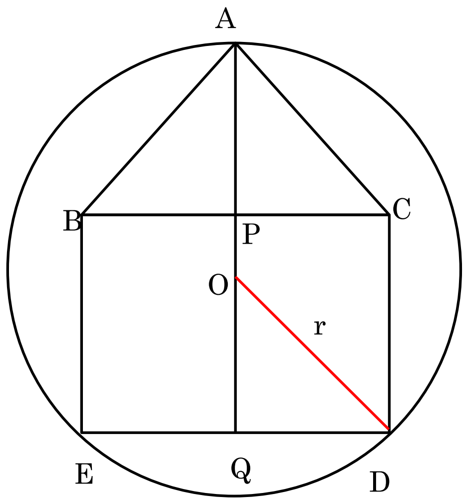
立方体の上に、底面が立方体の天面と共有する正方形、側面が正三角形の正四角錐が載っている。

この立体はジョンソン立体８番（正四角錐柱）ともよばれる。

この立体に外接する球の半径が立方体の一辺に等しいことを示せ。



解答（中川）



便宜上 AB=BE=2 と置く。

△OQD において、

QD=$\sqrt{2}$ したがって

$OQ^2+2=r^2$

また、△APC において、

PC=$\sqrt{2}$、AC=2 であるから、

AP=$\sqrt{2}$

他方

PQ=2 であるから、

$OA^2=r^2=(\sqrt{2}+2-OQ)^2$

よって、

$OQ^2+2=(\sqrt{2}+2-OQ)^2$

$OQ^2+2=2+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}OQ+4-4OQ+OQ^2$

$OQ=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

よって

$r=2=BE$

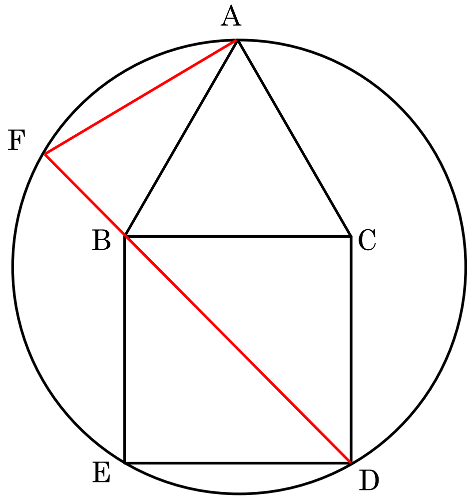
こうして、佐久間纉の○△□に関する美しい関係が、三次元でも成り立つことが証明された。

派生問題（中川）

正方形の対角線ＤＢの延長が円Ｏと交わる点をＦとする。

このとき、AB=AF

であることを示せ。



解答（中川）

三角 OED は正三角形であった。

また、題意より△BED は直角二等辺三角形であるから、

∠EDB=45°

よって、

∠BDO=15°

△OFD は題意より二等辺三角形であるから、

∠OFD=15°、∠DOF=150°

また、∠BEO=90°－60°＝30°で、

△EOB は二等辺三角形であるから、

∠EOB=75°

したがって、

∠BOF=150°－60°－75°＝15°

よって、

△BOF は底角 15°の二等辺三角形であり、OB=BF

他方、題意より、∠EBF=135°であるから、

∠FBA=360°－135°－90°－60°＝75°

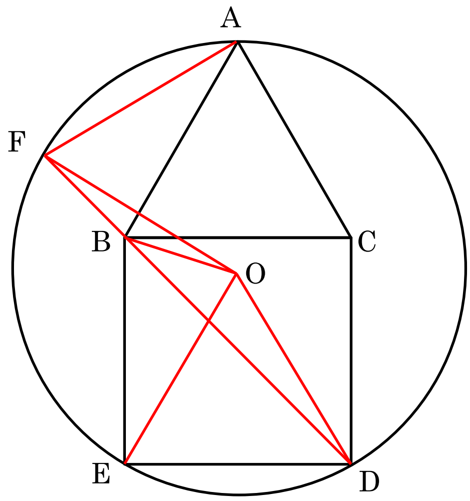
よって、

二辺夾角相同により、

△AFB≡△EOB

よって△AFB も二等辺三角形であるので、

AB=AF



解答（五輪）

∠AFD と∠AOD とは、円弧 AD（時計回り）にたいする円周角と中心角の関係にある。

∠AOD=180°　−30°　＝150°

であるから、

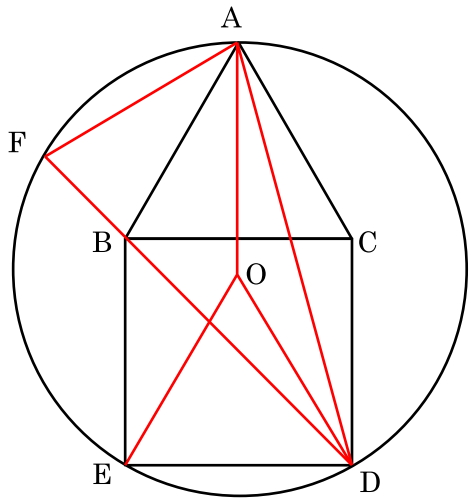
∠AFD＝75°

また、題意から、

∠ABF=180°　−60°　−45°　＝75°

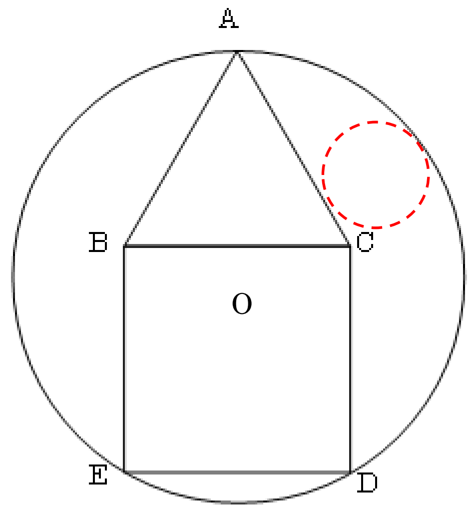
よって△AFB は二等辺三角形なので、

AB=AF



派生問題（中川）

五角形 ABEDC と円 O との隙間に入る最大の円をすべて作図し、その直径を求めよ。



解答（中川）

半径 OS⊥CD

半径 OT⊥AC

半径 OU⊥AB

半径 OW⊥BE

となるようにとった時が、点 O から線分 CD,AC,AB,BE までの距離が最も短くなるので、隙間を埋める円の直径も最大となる。

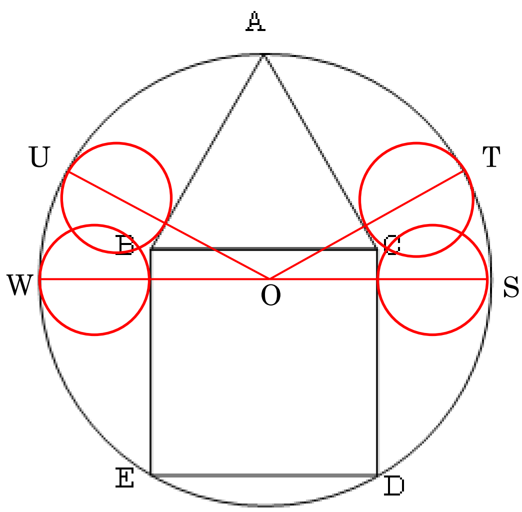
いずれの円の直径も円 O の半径の２分の１である。

円 O を時計の文字盤に見立てるならば、

A：１２時（反対側６時）

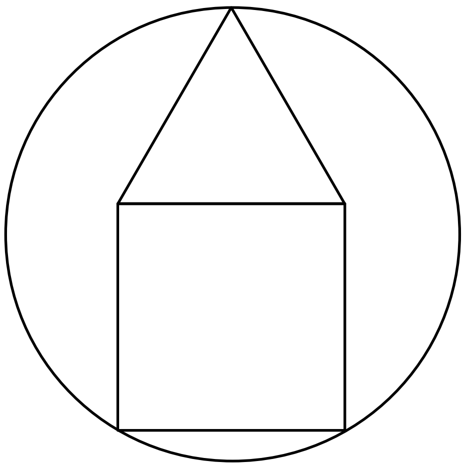
T：２時（反対側８時）

S：３時



D：５時（反対側１１時）
E：７時（反対側１時）
W：９時
U：１０時（反対側４時）
となる。

作図問題（中川）
右の図を定規とコンパスのみ用いて最少手数で
作図せよ。



解答（中川）