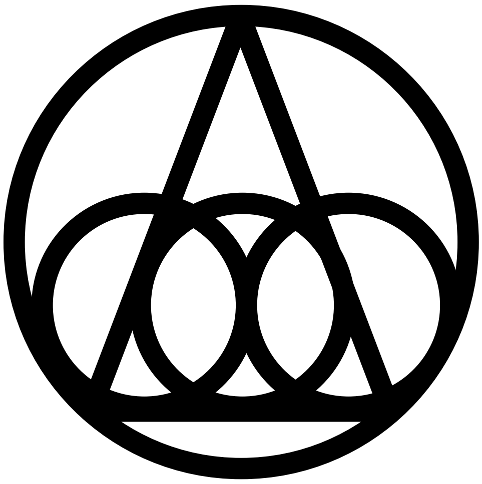
# 和算にまなぶ（4）

中川　宏

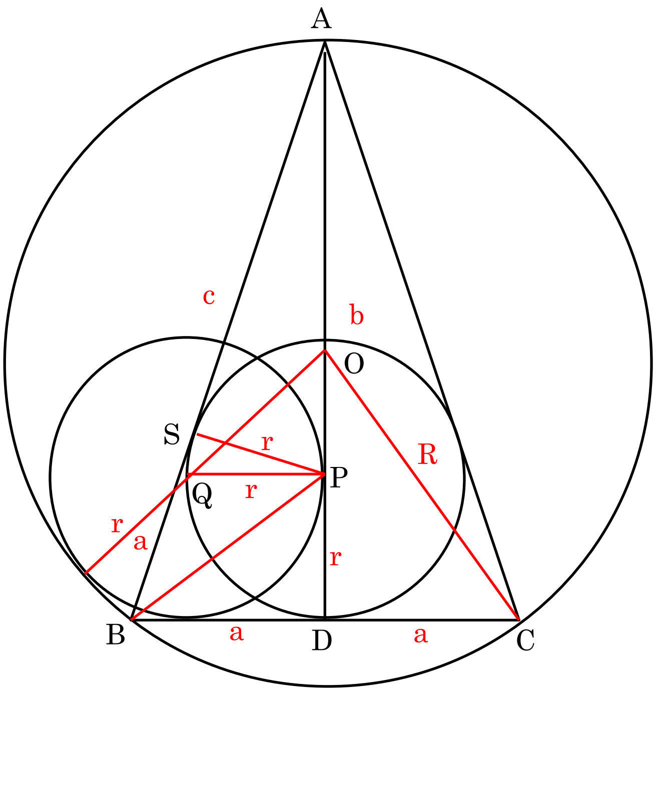
**問題（五輪）**

右の図が示す関係は、外円に内接する三角形が二等辺なら成立します。（もちろん正三角形の場合も）
提灯と名付けました。



**解答（中川）**

二等辺三角形 ABC の垂直二等分線 AD
辺長 AB=c, BD=a, AD=b　とおく。
外接円の中心 O、半径 R
内接円の中心 P、半径 r
内接円と AB の接点を S
BD および AD に接する半径 r の円の中心を Q とおく。




BD=BS=a
△ABD と△ASP は相似なので、
a：b：c＝r：c－a：b－r
よって、
ab－ar＝rc より

$$r=\frac{ab}{a+c}$$

他方△ODC において三平方の定理より、

$$R^2 = a^2+(b-R)^2$$

$$R=\frac{a^2+b^2}{2b}$$

題意は、直角△OQP において PQ＝ r のとき、円 Q が外接円に接するなら OQ＝R－ r であることを示せばよい。

R－ r $=\frac{a^2+b^2}{2b}-\frac{ab}{a+c}=\frac{a^3+a^2c+ab^2+b^2c-2ab^2}{2b(a+c)}=\frac{a^2(a+c)+b^2(c-a)}{2b(a+c)}$ …①

OP=b－(R+r)＝b$-\frac{a^2(a+c)+b^2(c+3a)}{2b(a+c)}=\frac{-a^2(a+c)+b^2(c-a)}{2b(a+c)}$ …②

OQ$^2$＝OP$^2$＋QP$^2$＝$[b-(R+r)]^2+r^2=\frac{b^4(c^2-2ac+5a^2)+a^4(a+c)^2-2a^2b^2(c^2-a^2)}{4b^2(a+c)^2}$

他方、

$(R-r)^2=\frac{b^4(c^2-2ac+a^2)+a^4(a+c)^2+2a^2b^2(c^2-a^2)}{4b^2(a+c)^2}$

このとき、

OQ$^2$と$(R-r)^2$との差をとってみると、

$\frac{4b^4(a^2)-4a^2b^2(c^2-a^2)}{4b^2(a+c)^2}=\frac{4b^4(a^2)-4a^2b^2(c^2-a^2)}{4b^2(a+c)^2}=\frac{b^2(a^2)-a^2(c^2-a^2)}{(a+c)^2}=\frac{a^2(a^2+b^2-c^2)}{(a+c)^2}$

であるが、

直角△ABD における三平方の定理より、

$a^2+b^2=c^2$ であるから、

OQ＝R－ r であることが示された。

---

**助言（五輪）**

①、②の式の形から、

$(R-r)^2-\mathrm{OQ}^2=(R-r)^2-(\mathrm{OP}^2+\mathrm{QP}^2)=\{(R-r)^2-\mathrm{OP}^2\}-\mathrm{QP}^2$

$=\{(R-r)+\mathrm{OP}\}\{(R-r)-\mathrm{OP}\}-\mathrm{QP}^2=\frac{b^2(c-a)}{b(a+c)}\cdot\frac{a^2(c+a)}{b(a+c)}-\left(\frac{ab}{a+c}\right)^2=\frac{a^2(c^2-a^2-b^2)}{(a+c)^2}=0$

とすると、すこーしだけ楽かなあ、と思いました。