

和算にまなぶ (12)

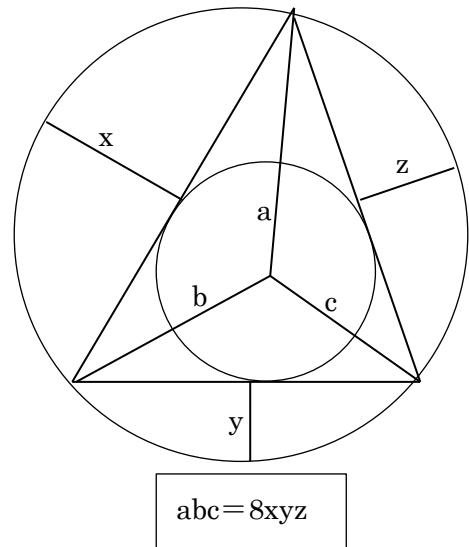
「新解説・和算公式集 算法助術」(土倉保編著、朝倉書店 2014 年刊) No.30 より

中川宏

定理

右のように任意の三角形の外接円と内接円があるとき、

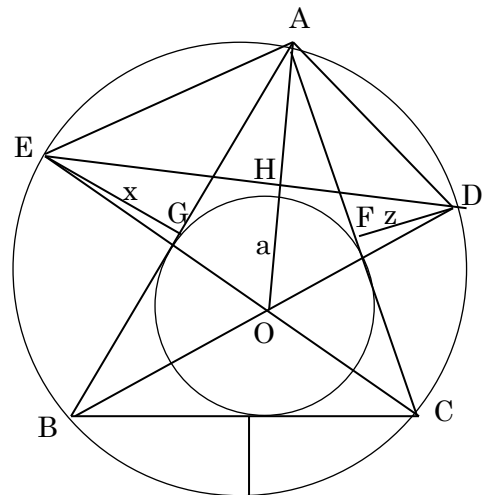
$$abc = 8xyz$$



証明

「算法助術」では、 $a^2 = 4xz$ というかたちで示されている。
土倉先生による解説がすばらしい。

BO は $\angle B$ の 2 等分線であるから、線分 z の外接円周上の点 D は BO の延長線上にある。弧 AD = 弧 DC
よって、 $\angle AED = \angle DEC = \angle DAC$
同様に、線分 x の外接円周上の点 E は CO の延長線上にある。
弧 AE = 弧 EB
よって、 $\angle ADE = \angle EAB = \angle ECB$
また、AO は $\angle A$ の二等分線であるから、 $\angle BAO = \angle OAC$



三角形 EOA において、
 $\angle EOA = \angle OCA + \angle OAC$
 $\angle EAO = \angle EAB + \angle BAO = \angle ECB + \angle OAC$
 $= \angle OCA + \angle OAC$

よって、 $\angle EOA = \angle EAO$ の二等辺三角形であるから $\angle E$ の二等分線 $EH \perp AO$
 $\angle AEH(D) = \angle DAC$ であるから、直角三角形 AEH は直角三角形 DAF と相似。

したがって、
$$\frac{AH}{DF} = \frac{AE}{DA}$$

同様に、直角三角形 AEG は直角三角形 DAH と相似であるから、

$$\frac{AH}{EG} = \frac{AD}{AE}$$

よって、
$$\frac{AH}{DF} \frac{AH}{EG} = 1$$

$AH = \frac{a}{2}$ であるから、

$$a^2 = 4xz$$

同様にして、

$$b^2 = 4xy$$

$$c^2 = 4yz$$

も示すことができる。

よって、

$$a^2 b^2 c^2 = 64x^2 y^2 z^2$$

したがって、

$$abc = 8xyz$$

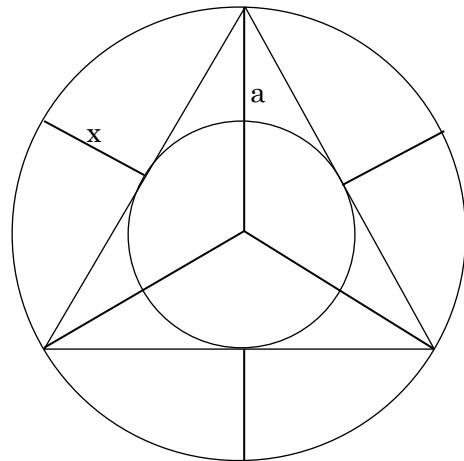
意外な結果なので少し確かめてみよう。

正三角形の場合は、

$$a = 2x$$

であるから、

$$a^3 = 8x^3$$



極端に細い二等辺三角形の場合

a は直径に近づき、 b 、 c はゼロに近づく。

x 、 z は半径に近づき、 y はゼロに近づく。

$$abc = 8xyz$$

変形して、
$$y = \frac{abc}{8xz}$$

外接円の半径を 1 としたとき、

$\frac{a}{xz}$ は 2 に近づくから、 y は $\frac{bc}{4}$ に近づく。

もし、 $b=c=\frac{1}{100}$ の場合は、

$$y = \frac{1}{40000} \text{ に近づくことになる。}$$

とても図示できないような隙間である。

しかし三角形 OBC はけっしてひしゃげることはなく、直角二等辺三角形に近づくと思われる。

